



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

**LAS RAÍCES Y RADICALES
EN LIBROS DE TEXTO EN CHILE
(1969 – 2009)**

Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte
a la Didáctica de las Matemáticas

Autor

ROBERTO ALFREDO VIDAL CORTÉS.

Tesis doctoral presentada a la Facultad de Ciencias de la Educación
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación

Director: Dr. MARIO QUINTANILLA GATICA.

TOMO I

Noviembre, 2009

Santiago - Chile



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Los siguientes académicos constituyeron la Comisión Evaluadora de esta Tesis:

Dra. LEONORA DÍAZ MORENO

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

Dr. ALBERTO LABARRERE SARDUY

Universidad Santo Tomas, Chile

Dr. ALEXANDER MAZ MACHADO

Universidad de Córdoba, España

TOMO I

Noviembre, 2009

Santiago - Chile

Autorización para la reproducción de la tesis.

© 2009, Roberto Alfredo Vidal Cortés

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

Agradecimientos:

En estas breves líneas quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a quienes han hecho posible este sueño, originado por el deseo de mejorar la Educación en nuestro país, en especial, en el ámbito de la Educación Matemática, por medio de esta tesis, como un pequeño grano de arena fomentando la discusión.

A los Doctores Alberto Labarrere y Leonora Díaz, por sus asertivas e interesantes observaciones y dedicación a la lectura profunda de los escritos, al Doctor Alexander Maz, por su gran apoyo, orientaciones y disposición desde los inicios de la investigación; a mi amigo y Director de Tesis, Dr. Mario Quintanilla, a quien debo en particular no sólo la adquisición de un importante constructo de saberes académicos en mi formación doctoral, sino también la preocupación y retroalimentación constante de los avances de su aprendiz, fuerza que en gran medida permitió culminar este trabajo.

Finalizo agradeciendo los aportes de colegas y amigos, con quienes compartí discusiones temáticas y largas horas de estudio: Johanna Camacho, Fernando Soto, Alejandra Besa, Pamela Guerra, Ivón Mella y Tania Cabezas entre muchos más.

Dedicatoria:

A mi familia, mi esposa Soledad y mi hija Antonia, quienes pacientemente han soportado mis ausencias en mis años de estudiante.

RESUMEN

I. ¿Qué trata la Investigación?

Se realizó un análisis de los libros de texto de mayor uso en Chile entre 1969 y 2009, respecto del tratamiento del álgebra de radicales, contenido que presenta rupturas del saber matemático con el saber escolar. El álgebra de radicales ha estado presente en los programas ministeriales de las 3 reformas acaecidas en este lapso de tiempo y que presenta confusiones conceptuales en el profesorado de matemáticas acerca del concepto de raíz (Vidal, 2006) y en algunas propuestas de libros de texto de Rumania y España (Buhlea y Gómez, 2008). Por tanto, a partir de estos y otros antecedentes, se consideró como un problema de importancia el identificar y caracterizar cómo los libros de texto están proponiendo la enseñanza del álgebra de radicales, observando si éstas y otras rupturas se mantienen en el tiempo o se han subsanado, lo que proporciona el objetivo central de esta tesis. En síntesis se realiza en detalle una vigilancia epistemológica de los radicales durante tres cambios curriculares.

El sustento teórico corresponde a la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991). Se incorpora además, otros elementos que complementan el posicionamiento teórico adoptado, tal como la visión naturalizada y pragmática de la ciencia (Giere, 1992) y la emergencia de una nueva filosofía de las matemáticas (De Lorenzo, 2000) la incorporación de la Historia de la Matemática en el aula, la matemática escolar y los libros de texto (Villegna, 2007), y de modo más general, la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica (Godino, 2002).

II. ¿Cómo se realizó la Investigación?

Se optó por el paradigma cualitativo, que alberga a la investigación histórica en educación, utilizando la técnica de análisis histórico - crítico y el análisis de contenido. La muestra es intencional y por conveniencia y estuvo constituida por 20 libros de texto.

Para recoger los datos, se elaboraron, validaron y aplicaron dos tipos de matrices, una para recopilar información general de identificación y contexto del libro y otra destinada a captar los datos para el posterior análisis del álgebra de radicales. Se incorporó también la descripción e interpretación de los programas ministeriales para obtener una segunda fuente, de modo que junto al Saber Erudito de referencia se pudiera establecer la triangulación como análisis de la información, levantando la existencia de rupturas en el proceso de transposición didáctica externa.

III. ¿Qué se Obtuvo?

Se encontraron discursos contradictorios en un mismo libro de texto, demostraciones de teoremas con errores lógicos, errores conceptuales debidos a recortes del saber erudito que omiten las restricciones de los campos de validez de las propiedades de los radicales, tratamientos en su mayoría axiomáticos y actividades de tipo mecanicista, lo que hace entrever que no se ha superado la visión de las matemáticas en un plano netamente instrumental – operativo (Labarrere y Quintanilla, 2006).

A nivel evolutivo desde 1969 a 2009, se pudo identificar y caracterizar el tratamiento del álgebra de radicales en los programas ministeriales, del siguiente modo: No introducen errores de tipo conceptual, se pasa de una mirada estructuralista del primer período (matemáticas por las matemáticas), a una mecanicista (segundo período) y luego a una línea que tiende a recuperar las matemáticas desde la resolución de problemas en contacto con el mundo real, pero las presentaciones siguen siendo en su mayoría de tipo expositiva. Los programas dejan gran parte de la libertad de interpretación a los libros de texto, excepto con el último tipo de programas que ofrecen actividades tipo para los estudiantes.

En relación a los libros de texto, un cambio importante que se aprecia es la autoría que en los dos primeros períodos corresponde a profesores de matemáticas en su mayoría, mientras que en el tercer período predominan matemáticos puros, que presentan situaciones problema pero carecen de método heurístico en su discurso.

Respecto al álgebra de radicales propiamente tal, hay avances respecto al uso de diversas representaciones como la noción de función raíz cuadrada y raíz cúbica. En el último período se abandonan muchas de las propiedades, siendo la multiplicación y división de radicales las únicas que permanecen en los textos actuales, también disminuyen las demostraciones de las propiedades que en el primer período era materia obligada, pero hay un enmarcado énfasis en situaciones aritméticas más que algebraicas.

SUMMARY

I. What is the investigation about?

A summary was made based on the most used text books in Chile between 1969 and 2009, regarding the treatment of radicals of algebra, content that shows a rupture of the mathematical knowledge and the school knowledge. The radicals of algebra have been present in ministerial programs of the three reforms that have occurred in this period of time and they show conceptual confusions in the mathematics teaching staff about the concept of square root (Vidal, 2006) and in some Rumania text books proposals and Spain (Buhlea y Gomez, 2008). Therefore, from these and other records, it was consider as an important matter to identify and portray how text books are proposing the teaching of radicals of algebra, observing if these or other ruptures keep in time or they have been rectified, which provide us the main objective of this thesis. In synthesis, a detailed epistemological vigilance was carried out concerning radicals of algebra during 3 curricular changes.

The theoretical support belongs to the Transposition Didactics Theory (Chevallard, 1991). Apart from this, there are other elements that complement the adopted theoretical positioning, such as The naturalized vision and Pragmatic of Science (Giere, 1992) and the need of a new mathematics philosophy (De Lorenzo, 2000) the incorporation of The History of Mathematics in the classroom, the school mathematics and the text books (Villella, 2007) and in a more general way, The Didactic of Mathematics as a scientific discipline (Godino, 2002).

II. How was the Investigation carry out?

The qualitative paradigm was chosen, which holds the historical investigation in education, using the historical-critic analysis technique and the content analysis. The sample was intentional and it was made up with 20 text books.

In order to gather the data, two types of matrix were elaborated, validated and put into practice, one to gather the general identification information and the context of the book and the other one destine to capture the data , for the later analysis of radicals of algebra. There were also included the description and interpretation of the ministerial programs to obtain a second source, along with the Erudite Knowledge. As reference it could be establish the triangulation as an analysis of the information, raising the existence of ruptures in the process of the external didactic transposition.

III. What was the result?

Contradictory discourses were found in a same text book, proof of theorems with logical errors, conceptual errors due to cuttings of the Erudite Knowledge that omit the restrictions of the validity field of the properties of radicals, mostly axiomatic treatments and mechanic -like activities, which reveal us that it has not overcome mathematics in a merely instrumental - operative plane (Labarrerre y Quintanilla, 2006).

In an evolutionary level from 1969 to 2009 we were able to identify and characterized the treatment of radicals of algebra in ministerial programs as follow: they do not bring in errors of a conceptual type, they move from a structuralist view of the first period (mathematics by mathematics) to a mechanic (second period) and then to a line that tends to get back mathematics since the solution of problems in contact with the real world, but the presentations are still being mostly of the exposition type. The programs leave some part of the freedom of interpretation behind to a text book, except the last type of programs that offer type-activities for the students.

In relation to the text books, an important change is shown, in terms of authorship, the first two periods were mostly in charge of mathematics teachers; while in the third period pure mathematicians prevailed, that show problems but they lack of Heuristic method in their discourse.

With regarding to the radicals of algebra as such, there is a progress concerning the use of various representations such as the notion of function of the square and cubic root. In the last period several properties were dropped out, being the multiplication and division of radicals the only ones that prevail in the current text books, also the demonstrations of properties decrease, which in the first period were mandatory, but there is a framed emphasis in arithmetic rather than algebraic situations.

Tabla de Contenido

	Pág.
Agradecimientos	ii
Dedicatoria	iii
Resumen	iv
Summary	vi

TOMO I

PARTE I

El problema, sustento teórico y metodológico. 1

Capítulo 1: El Problema.

1.1. Introducción.	3
1.2. El Problema de Investigación y su relevancia.	6
1.3. Hipótesis y Objetivos de la investigación.	11
1.4. Antecedentes que remiten el problema.	13
1.5. Sinopsis de los siguientes capítulos.	19

Capítulo 2: Marco Teórico.

2.1. Introducción.	22
2.2. La Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica y Formación Docente.	24
2.3. La Teoría de la Transposición Didáctica.	28
2.3.1. Los 5 actos de la Transposición Didáctica.	29
2.4. La Historia de las Matemáticas y su incorporación en el aula.	35
2.5. Crisis en la enseñanza de las Matemáticas: La Reforma de las Matemáticas Modernas.	42
2.6. La emergencia de una nueva Filosofía de las Matemáticas y la visión Naturalizada y Pragmática de la Ciencia.	47
2.6.1. La Filosofía Griega.	48
2.6.2. Las corrientes Racionalistas, Formalistas y Logicistas.	49
2.6.3. Hacia la obsolescencia del Racionalismo radical, del Logicismo y del Formalismo.	52
2.6.4. Hacia una nueva Filosofía de las Matemáticas.	53
2.6.5. La visión Naturalizada y Pragmática de la Ciencia.	57
2.7. La divulgación del conocimiento matemático: el caso de los Libros de Texto.	61
2.7.1 El libro en el desarrollo de la humanidad	63
2.7.2 Evolución, desarrollo e importancia de los textos de estudio	63

2.7.3 De la calidad de un libro de texto	65
2.7.4 De la producción, distribución y costo del material educativo	67
2.7.5 De la adquisición de libros de texto escolar	69
2.8. Epistemología del Álgebra de Radicales y su lugar en el edificio Matemático.	72
2.8.1. Origen del concepto de raíz y de radical.	73
2.8.2. Empleo del concepto de raíz y uso del signo radical.	77
2.8.3. Los radicales en el ámbito de las funciones.	84
2.8.4. Ecuaciones que contienen la incógnita bajo el signo radical.	89
2.9. Aplicación del Modelo de Toulmin al concepto de Raíz (cuadrada).	89
2.9.1. La evolución del concepto de Raíz cuadrada a través del Modelo de Toulmin.	91
2.10. Síntesis del capítulo.	95
Capítulo 3: Marco Metodológico	
3.1 Introducción.	98
3.2 Diseño: Fundamentos y Técnicas.	99
3.2.1. Consideraciones Previas.	99
3.2.2 Las Técnicas de Investigación utilizadas y criterios de rigor científico.	102
3.2.2.1 La técnica del Análisis Histórico – Crítico	103
3.2.2.2 La técnica del Análisis de Contenido	105
3.3 Plan de recogida de datos.	107
3.3.1 Fuentes documentales para localizar el Saber Matemático de los radicales.	107
3.3.2 Períodos históricos contemplados en la investigación.	109
3.3.3 Programas oficiales de estudio.	111
3.3.4 Selección de los Libros de Texto.	113
3.4 Plan de Análisis de los datos.	117
3.4.1 Matriz MIGp para la caracterización general de los programas oficiales.	119
3.4.2 Matriz MACp para la caracterización del contenido matemático y del tratamiento del álgebra de radicales en los programas	121
3.4.3 Matriz MIGt para la caracterización general de los libros de texto.	123
3.4.4 Matriz MACt para la caracterización del contenido matemático y del tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto.	124
3.4.5 Matrices de resumen y cotejo. Caracterizaciones y perfiles.	129
3.4.6 Triangulaciones y obtención de conclusiones.	144
3.5 Síntesis del capítulo: Las fases de la investigación.	146

PARTE II

Presentación y Análisis de la información. 150

Capítulo 4: El Saber a Enseñar en los Programas Ministeriales en contexto.

4.1	Introducción	152
4.2	La Reforma a la Educación de 1965.	153
4.2.1	Contexto socio – político y educacional.	153
4.2.2	Revisión de los Programas Ministeriales de esta Reforma.	161
4.2.2.1	Decreto	161
4.2.2.2	Características Generales de los Programas Oficiales del Período.	163
4.2.2.3	Programa Seleccionado y su identificación.	164
4.2.2.4	Secciones del Programa	164
4.2.2.5	Referencias Bibliográficas del Programa	165
4.2.2.6	Lugar Oficial del álgebra de radicales en el Saber a Enseñar	166
4.2.2.7	Propósitos explicitados por los programas acerca de los Tópicos relacionados con los Radicales	167
4.2.2.8	Organización de los contenidos	167
4.2.2.9	Orientaciones explicitadas acerca de los radicales	169
4.2.2.10	Actividades o ejemplos propuestos	170
4.3	La Reforma a la Educación de 1981.	174
4.3.1	Contexto socio – político y educacional.	174
4.3.2	Revisión de los Programas Ministeriales de esta Reforma.	182
4.3.2.1	Decreto	182
4.3.2.2	Características Generales de los Programas de este Período.	184
4.3.2.3	Programa Seleccionado y su identificación.	185
4.3.2.4	Secciones del Programa	186
4.3.2.5	Referencias Bibliográficas del Programa	187
4.3.2.6	Lugar Oficial del álgebra de radicales en el Saber a Enseñar	188
4.3.2.7	Propósitos explicitados de los tópicos relacionados con los Radicales	189
4.3.2.8	Organización de los contenidos	191
4.3.2.9	Orientaciones explicitadas acerca de los radicales	192
4.3.2.10	Actividades o ejemplos propuestos	192
4.4	La Reforma a la Educación de 1996.	193
4.4.1	Contexto socio – político y educacional.	193
4.4.2	Revisión de los Programas Ministeriales de esta Reforma.	199
4.4.2.1	Decreto	199
4.4.2.2	Características Generales de los Programas Oficiales del Período.	201
4.4.2.3	Programa Seleccionado y su identificación.	203

4.4.2.4 Secciones del Programa	203
4.4.2.5 Referencias Bibliográficas del Programa	204
4.4.2.6 Lugar Oficial del Álgebra de radicales en el Saber a Enseñar	207
4.4.2.7 Propósitos explicitados de los tópicos relacionados con los Radicales	208
4.4.2.8 Organización de los contenidos	210
4.4.2.9 Orientaciones explicitadas acerca de los radicales	214
4.4.2.10 Actividades o ejemplos propuestos	215
4.5 Síntesis del capítulo.	228
4.5.1. Resultados del periodo	231
4.5.2. Resultados de conjunto	233

TOMO II

Capítulo 5: Análisis de los libros de texto del Período 1969 – 1981

5.1 Introducción	238
5.2. Aplicación de las matrices a los libros de texto.	239
5.2.1.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 1 ^a	240
5.2.1.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 1 ^a	241
5.2.2.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 2 ^a	254
5.2.2.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 2 ^a	255
5.2.3.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 3 ^a	272
5.2.3.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 3 ^a	273
5.2.4.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 4 ^a	276
5.2.4.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 4 ^a	277
5.2.5.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 5 ^a	297
5.2.5.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 5 ^a	299
5.2.6.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 6 ^a	317
5.2.6.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 6 ^a	318
5.3 Síntesis del capítulo.	334

Capítulo 6: Análisis de los libros de texto del Período 1982 – 2000

6.1. Introducción	344
6.2. Aplicación de las matrices a los libros de texto.	345
6.2.1.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 1b	346
6.2.1.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 1b	347
6.2.2.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 2b	358
6.2.2.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 2b	359
6.2.3.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 3b	360
6.2.3.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 3b	362
6.2.4.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 4b	377
6.2.4.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 4b	379

6.2.5.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 5b	388
6.2.5.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 5b	390
6.2.6.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 6b	397
6.2.6.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 6b	398
6.2.7.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 7b	411
6.2.7.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 7b	412
6.3. Síntesis del capítulo.	419

Capítulo 7: Análisis de los libros de texto del Período 2001 – 2009

7.1. Introducción.	427
7.2. Aplicación de las matrices a los libros de texto.	428
7.2.1.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 1c	429
7.2.1.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 1c	430
7.2.2.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 2c	440
7.2.2.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 2c	442
7.2.3.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 3c	442
7.2.3.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 3c	443
7.2.4.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 4c	458
7.2.4.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 4c	460
7.2.5.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 5c	477
7.2.5.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 5c	478
7.2.6.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 6c	491
7.2.6.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 6c	491
7.2.7.1 Aplicación de la matriz MIGp al libro de texto 7c	493
7.2.7.2 Aplicación de la matriz MACp al libro de texto 7c	495
7.3. Síntesis del capítulo.	510

PARTE III

Resultados y conclusiones. 519

Capítulo 8: Resultados y Conclusiones

8.1. Introducción.	521
8.2. Resultados locales de la revisión de Programas.	522
8.3. Caracterización del Saber a Enseñar en los libros de texto.	524
8.4. Triangulación de las Caracterizaciones CSaEp, CSaEt con el Saber Sabio.	527
8.5. Conclusiones específicas respecto a los Objetivos e Hipótesis.	539
8.6. Conclusiones generales respecto a la Metodología e instrumentos utilizados.	543
8.7. Proyecciones de este estudio.	547

Referencias Bibliográficas 550

PARTE I

**EL PROBLEMA,
SUSTENTO TEORICO Y
METODOLOGICO**

CAPITULO 1

El Problema de Investigación

1.1. Introducción.

En Chile, como en otros lugares del mundo, las matemáticas son vistas por una parte considerable de la gente como una ciencia formal, dura, dogmática, incluso muy bien estructurada y terminada. Llama la atención que al involucrarse con su historia, se encuentren elementos allí que consternan a quienes fuimos incluso formados bajo esta concepción de las matemáticas. Rastreando en la Historia de la Matemática, se encuentra el “lado humano” de éstas, se pueden conocer: inesperadas controversias y pugnas entre científicos, debates que no siempre decantaron en avances sino también en retrocesos de teorías en pleno desarrollo, saltos impensables para nuestros ojos, diversos estancamientos teóricos, pruebas refutadas después de varios años de aceptación, modificación y complementación de conceptos, sentido y contexto desde los que emergieron las problemáticas de diversas épocas e intereses que llevaron a los matemáticos a construir sus objetos de estudio, sus teorías, y también a fracasar con ciertas ideas. De ahí es necesario concebir la importancia del conocimiento de la historia de las Matemáticas, como mostraremos en esta investigación, como una rica fuente de información que permite por una parte, vislumbrar respuestas a problemas relacionados con la divulgación de los conceptos matemáticos, que han trascendido con errores o usos poco cuidadosos en su enseñanza y por otro desaprender la concepción heredada por el paradigma de la dura racionalidad positivista que caracterizó a gran parte de las esferas de poder científico durante la mayor parte del siglo XX.

En mi experiencia con la enseñanza de las matemáticas, una de las primeras interrogantes que me he planteado es: ¿Por qué durante mucho tiempo se han enseñado ligadas a un énfasis algorítmico, poco relacionado con la vida cotidiana, sin mayores explicaciones del “por qué” de los teoremas, las propiedades, los conceptos, las teorías?. Sin duda, esto se manifiesta día a día tras la manera en que muchos estudiantes se alejan por cierto muy justificadamente de esta ciencia.

En el mismo paradigma descrito anteriormente, la divulgación de la historia de las matemáticas se reducía a exhibir historietas o curiosidades que no quedan más que en un conocimiento aislado, vacío en la perspectiva de la simple anécdota, sin sacarles un provecho metodológico, tanto así que los matemáticos mayormente conocidos son griegos, lo que pone de manifiesto una divulgación atrasada en más de 1.000 años al presentar a Pitágoras, Euclides, y/o Thales, como si no existieran otros matemáticos de épocas más recientes, lo que también tropieza con un buen conocimiento de la génesis de las ideas matemáticas, como se puede ejemplificar por el uso que mucho antes de la Escuela Pitagórica tenían los egipcios y babilonios del teorema de Pitágoras. Otro ejemplo del mismo tipo, en que el nombre no refleja lo realmente acontecido es (entre muchos más) el Triángulo de Pascal, que es obra del matemático italiano Niccolo Fontana Tartaglia. Para cualquiera que leyera que Euclides es el Padre de la Geometría, (frase que se puede rescatar de algunas enciclopedias) podrían interpretar que sólo hay una geometría y a su vez que la inventó Euclides, ideas ciertamente equívocas.

Pareciera ser que hay un conocimiento oculto, del que sospecho es incluso ignorado por al menos una buena parte de los profesores de matemáticas escolares y quizá por buena parte de los investigadores en matemáticas eruditas. Sin embargo, lo que más preocupa es una carencia de cultura y alfabetización matemática, más allá del “sacar cuentas” o tener habilidades de cálculo rápido, concepciones del quehacer matemático que están prácticamente obsoletas.

Es este hecho o conjunto de sucesos que me han motivado para investigar en ello. En esta tesis, me inserto en el estudio del tratamiento de los Radicales y del álgebra¹ definida sobre ellos y su entorno ecológico puesto que así como ocurre con los números

¹ Como álgebra de radicales entenderemos aquí el estudio de las operaciones con expresiones que contienen radicales y sus campos de validez en el cuerpo de los número reales y su extensión al cuerpo de los números complejos, extensión que es clave en esta investigación, en la que se centra el problema que origina este trabajo.

negativos, (Maz, 2007), los radicales también son ámbito de preocupación de los investigadores en Educación Matemática, por la complejidad que significa su enseñanza (por ejemplo en el caso de comprender el concepto de número irracional (Vargas, 2003)) y analizar entonces el proceso de transposición didáctica de este saber matemático al nivel de la enseñanza media donde se ubica en los programas oficiales del Ministerio de Educación, observando cómo se divulga o comunica este objeto matemático al profesor, quien determina el modo en que los estudiantes se apropiarán de este saber.

Cabe destacar que los elementos de divulgación que se han escogido para su análisis corresponde, por un lado, a los programas ministeriales de las últimas tres reformas educacionales y por otra, a los libros de texto mayormente utilizados en las aulas y conocidos por los profesores, de modo de examinar las rupturas epistemológicas que dan cuenta de una transposición insatisfactoria, que recorta elementos que definen al álgebra de radicales y peor aún, conduce a errores conceptuales en relación al saber matemático (erudito) entre los conceptos de raíz y radical (Vidal, 2006).

La Reforma de las Matemáticas Modernas acaecida en el mundo en la década de los 60' y 70' durante el siglo XX, enfatizó la presentación formal por medio de la axiomática y la influencia de la Teoría de Conjuntos en la enseñanza de las matemáticas, marcando un hito histórico. Por esto, los libros de texto que se analizarán corresponden a 3 distintos períodos demarcados por las últimas tres reformas educacionales en Chile, de las cuáles la primera trae consigo la herencia de esta reforma mundial y por tanto, uno de los propósitos de este trabajo reside en examinar los cambios (si existen) de los tratamientos del álgebra de radicales hasta el 2009, año en que es de suponer se debe haber superado la forma de enseñanza implantada por la reforma mundial de los años 60', la que produjo tantos fracasos respecto del aprendizaje de las matemáticas.

Debido a lo expuesto anteriormente, el análisis de libros de textos se realizará desde la mirada del desarrollo histórico de los Radicales, de modo de identificar y caracterizar la relación entre la presentación y tratamiento del concepto con su propia epistemología.

1.2. El Problema de Investigación y su relevancia.

¿Qué diría Ud. si aprende un concepto a través de la enseñanza de un profesor o de algún texto, (un divulgador) y después de algún tiempo se vuelve a encontrar con el mismo objeto de saber bajo una definición diferente?. Cualquier persona sometida a este experimento, y digamos con un cierto interés, probablemente se cuestionaría, al menos. Esto es precisamente lo que pretende denunciar esta investigación. Se ilustrará esta situación mediante el análisis del tratamiento del Álgebra de Radicales en el período que va de 1969 a 2009, contenido designado como un saber a enseñar por los programas ministeriales del ciclo secundario (enseñanza media) y que ha sido seleccionado por la existencia de rupturas epistemológicas en su proceso de transposición didáctica². Se propone como aporte de este trabajo, la renuncia a la transposición que desvirtúa y mutila el saber matemático de los radicales, en vista de las confusiones que durante largo tiempo ha causado mediante un estilo de aprendizaje anti-crítico y anti-razonado, estilo instrumental que puede soportar sin duda la adquisición temporal de conceptos y procedimientos oscuros o nebulosos, que crean una suerte de cajas negras que se hace necesario develar a favor de un aprendizaje no sólo significativo, sino también coherente del saber matemático de base.

² La teoría de la Transposición Didáctica propuesta por Y. Chevallard (1991) es el Marco Teórico específico del marco global que se presenta en esta tesis y será abordado por tanto en parte del segundo capítulo.

Por esto, se debe considerar la enseñanza de la Matemática por medio del proceso de construcción del objeto matemático escolar, considerando su historia (elemento sobre el que se volverá más adelante en detalle, a través de su análisis conceptual - evolutivo (Toulminiano³)), de modo de finalmente levantar a modo de anuncio, la discusión acerca del ineludible cambio de lo operativo a lo heurístico y hermenéutico respecto de la formación disciplinar del profesor de matemáticas.

Si nos detenemos a revisar el concepto de raíz cuadrada en diversos textos escolares de distintas épocas, nos encontramos con una situación similar a la que experimentaríamos al dialogar sobre este objeto matemático con profesores de educación media. Se advierte una seria confusión entre los conceptos de “raíz” y de “radical”, por ejemplo, al utilizar el mismo término raíz para señalar por ejemplo que $\sqrt{9}$ indica raíz cuadrada de 9, que consiste en encontrar aquellos números que cumplen con tener su cuadrado igual a 9, expresión verbal que corresponde a la ecuación $x^2 = 9$ y por tanto, asignando dos significados para el mismo término raíz, confundiendo el concepto de raíz desde el álgebra (como solución de una ecuación) y el de número imagen de una función real de variable real, a saber la función definida por $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \geq 0$ y $\sqrt{x} \geq 0$. Así, algunos autores optan por definir erróneamente la raíz cuadrada como una operación monaria con dos resultados (inversa a la elevación al cuadrado) versión que mezcla las acepciones mencionadas; otros como una operación inversa a la potenciación, que proviene de $a^n = b$ (expresión general que sirve para relacionar la potenciación, la radicación y la logaritmicación) donde se desea conocer a dados n y b , concepción que conlleva a error y a la misma confusión cuando no se especifica el hábitat de los parámetros, específicamente, para este estudio, la errada noción y conclusión de que $\sqrt{9} = \pm 3$.

³ La problemática se centra en el cambio conceptual de un concepto global (raíz) del cual emerge una particularidad (radical), lo que se estudiará en el apartado 2.9

Este es un fenómeno de transposición del objeto de saber Raíz cuadrada, lo que significa que desde su actual estatus en el **edificio matemático**, hasta que llega al alumno, se da una serie de adecuaciones a favor de una secuencia de enseñanza sistemática, en que se produce una cierta distancia entre el saber erudito y el saber que adquiere el estudiante. Si aceptamos que $\sqrt{9} = \pm 3$ es un error, (como lo probaremos en el apartado 2.8 del análisis histórico epistemológico y su actual estatus en el edificio matemático), también lo será $\sqrt{-4} = \pm 2i$, lo que muestra la importancia del problema en cuanto a su trascendencia al ámbito de los números imaginarios.

Por otra parte, en el cuerpo de los números complejos, se define en el saber sabio, las “raíces enésimas de un número complejo h ”, que alude al conjunto de todas las soluciones (llamadas también raíces) complejas x de la ecuación $x^n = h$, concepción que no incorpora el uso del símbolo radical $\sqrt{\quad}$, ya que éste se considera sólo para denotar al Radical cuadrático, es decir, aquel único número real positivo cuyo cuadrado es el número real a su vez positivo indicado en la cantidad subradical. Vemos aquí que la noción de raíz es mucho más amplia que la de radical cuadrático.

Al parecer no han existido cambios sustanciales a pesar del paso del tiempo (hipótesis central de investigación), en el tratamiento del álgebra de radicales, difundido en los libros de texto y ordenado por los programas oficiales de las últimas tres reformas educacionales (con cambios curriculares) ya que no se ocupan de la distinción entre los conceptos de raíz y radical, del uso del signo $\sqrt{\quad}$ y de sus campos de validez en contextos operatorios. Interesante es visualizar las discontinuidades que se dan entre los distintos programas ministeriales y los libros de texto mayormente utilizados.

El concepto de raíz (y más aún el de radical) queda muy poco afianzado en los estudiantes, lo que se verifica con la secuencia de enseñanza que parece favorecer la confusión al trabajar indistintamente el concepto de raíz en un ámbito aritmético que en el algebraico, y en este último aún, son distinguir el objeto raíz tomado como solución de una ecuación y el que se corresponde con el uso del signo radical $\sqrt{\quad}$. No hay alusión alguna a la gran crisis que originó la aparición de lo que hoy anotamos como $\sqrt{2}$, (salvo en un contexto de anécdota), su incorporación al mundo matemático (aceptando su estatus de número) y cómo esto se formalizó aproximadamente 2.000 años después (ver Kline, 1972).

La organización de la enseñanza de este objeto matemático, es decir su ecología en el saber escolar, se ha contextualizado en una serie de rupturas epistemológicas, distanciando al objeto erudito de su versión escolar que como se ha dicho privilegia su uso en un plano netamente operativo – instrumental (Labarrere y Quintanilla, 2006). Algunas de las rupturas se refieren a la imprecisión de los dominios de validez conceptual de los radicales (generalmente ausentes en el discurso escrito) y otro tipo de rupturas se asocian a errores en las demostraciones de las denominadas propiedades del álgebra de radicales, que también acarrearán otras nociones erróneas como ocurre con los conceptos de: Raíz cuadrada y de Ecuaciones Irracionales (Vidal, 2006).

¿Cuál es el sentido de este problema y su relevancia entonces?. Mostrar a través de este objeto matemático (los radicales) que es posible remediar la falta de comprensión de él, por medio del conocimiento de su historia en un abordaje epistemológico (no provisto en libros de texto, ni en las denominadas “guía o libro del profesor que suelen ofrecer algunas editoriales, sobretodo en la actualidad como requisito para participar en las licitaciones) que produciría efectos deseados en los estudiantes como el acercamiento a las Matemáticas, desmitificando las creencias en torno a las ciencias exactas o puras y su dogma, cambiar la visión propia de muchos profesores de matemáticas que adolecen

del sentido axiomático por desconocimiento de un análisis histórico – epistemológico de los objetos que enseña, que posea elementos de juicio para evaluar propuestas de enseñanza (en una forma de alfabetización epistémica del contenido matemático) y en consecuencia, velar por una adecuada transformación del saber erudito, en un saber a enseñar, evitando las bifurcaciones que mutilan la Matemática, atendiendo y corrigiendo la divulgación tanto propia como externa, propiciando la comprensión de las Matemáticas como una construcción humana y social. Como Plantea Bishop (1999):

“Las matemáticas se encuentran en una posición nada envidiable: son una de las materias escolares más importantes que los niños de hoy deben estudiar y, al mismo tiempo, una de las peor comprendidas. Su reputación intimida. Todo el mundo sabe que son importantes y que su estudio es necesario. Pero pocas personas se sienten cómodas con ellas; hasta tal punto que en muchos países es totalmente aceptable, en el ámbito social, confesar la ignorancia que se tiene de ellas, fanfarronear sobre la propia incapacidad para enfrentarse a ellas, ¡e incluso afirmar que se les tiene fobia!”.

Citando a Ferrari (1999):

¿Cómo tender el puente entre lo que parece ser un discurso rígido de verdades objetivas y lo que sucede al interior de cualquier salón de clases (de tipo occidental) en el que los aprendices son niños? ¿Cómo hacer más vivencial, más humano y, en definitiva, más educativo, el aprendizaje de la matemática?

Una de las claves para responder estas interrogantes, está en la instauración de un Modelo de preparación de propuestas para el aula de Matemáticas, modelo que considere el contexto propio no sólo de los estudiantes sino también el contexto en que se originan y desarrollan los mismos objetos matemáticos, lo que permite hacer el análisis histórico⁴. Confiamos que el impacto de este trabajo constituya un aporte para la investigación en la divulgación escrita de la Matemática que en su proceso de transposición, como lo indica Chevallard (1991), requiere de una vigilancia epistemológica, vigilancia que ejemplificaremos con el desarrollo de esta tesis en las siguientes páginas.

⁴ Esto no significa que el docente tenga que convertirse en un historiador.

Para el estudio y comprensión del Problema se plantea la siguiente pregunta general: ¿Cómo se ha difundido el álgebra de radicales y qué tratamiento se le ha dado en los libros de texto utilizados en Chile entre 1969 y 2009?

Y el siguiente conjunto de interrogantes específicas al respecto:

- ¿Existen distintas organizaciones del contenido matemático relacionado con el álgebra de radicales en textos escolares de matemática, ya sea de un mismo o distintos períodos entre 1969 y 2009?.
- ¿Cuáles son los cambios en el tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto, en caso que existan?.
- ¿Existen distintas vías para introducir el álgebra de radicales?.
- ¿Cuáles son las representaciones que se utilizan para trabajar el álgebra de radicales y bajo qué ámbitos numéricos?.
- ¿Existen rupturas epistemológicas en las matemáticas transpuestas tanto por los Programas Ministeriales como en los libros de texto?.
- ¿Cuáles son los posibles fundamentos epistemológicos respecto de las Matemáticas que subyacen a las normativas ministeriales y a los autores de los libros de texto?.

1.3. Hipótesis y Objetivos de la Investigación.

Para abordar las preguntas que permiten comprender el problema de investigación se han elaborado las siguientes hipótesis de trabajo, comenzando por la más general:

Existen rupturas epistemológicas en la transposición didáctica del álgebra de radicales, producto de su enseñanza y tales rupturas no se han subsanado en el tiempo.

A partir de esta hipótesis central, enunciada a modo de hilo conductor, se desprenden las siguientes hipótesis específicas:

Hipótesis específicas.

H1: La Transposición didáctica del álgebra de radicales ha permanecido invariante en su difusión en los libros de texto.

H2: En el tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto, se recurre a demostraciones basadas en el cambio de representaciones algebraicas que fallan en la secuenciación de los contenidos.

H3: El tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto, comunica errores conceptuales y procedimentales, evidenciándose rupturas epistemológicas con el saber matemático.

H4: No han existido cambios en los enfoques paradigmático – epistemológicos de los autores de los libros de texto, pero si a nivel de los programas ministeriales.

Objetivo General

De acuerdo a las hipótesis planteadas, se ha propuesto el siguiente objetivo general.

OG: Identificar y caracterizar el tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto mediante un análisis conceptual y de contenido durante el período 1969 2009 en Chile.

Objetivo Específicos.

OE1: Establecer las principales diferencias paradigmáticas entre los marcos curriculares de las reformas educacionales en el ámbito de la Educación Matemática.

OE2: Detectar cuáles son las propiedades del álgebra de radicales que se trabajan en relación a cada reforma curricular y cómo son tratadas.

OE3: Analizar los tipos de representaciones que se utilizan en el tratamiento de los radicales.

- OE4: Analizar las demostraciones o pruebas existentes de las propiedades tratadas en relación a sus argumentos matemáticos.
- OE5: Describir y analizar la organización didáctica de los contenidos con que se relacionan los radicales, que permita establecer la existencia de rupturas epistemológicas.
- OE6: Identificar posibles errores conceptuales o procedimentales en el tratamiento de los radicales.

Estos objetivos y las hipótesis planteadas se formularon a partir de la experiencia de quien suscribe como por diversas investigaciones que a continuación expongo.

1.4. Antecedentes que remiten al problema.

Dentro de los estudios realizados en relación al tratamiento de contenidos matemáticos en textos escolares, se encuentra la realizada por Vargas (2003) sobre los números irracionales, quien examina libros de octavo grado en Colombia, para determinar su estado a la luz de una de las formas históricas en que se aborda su conceptualización: las cortaduras de Dedekind. De las 4 maneras en que los matemáticos de fines del siglo XIX y comienzos del XX, se ocuparon de definir el número real (Weiertrass, Méray, Cantor, Dedekind), toma a este último autor por considerar explícitamente el problema de la continuidad de los números reales, problema que es el límite entre los números racionales (numerables) y los irracionales (no numerables), aunque en rigor y ciertamente, el aspecto de la numerabilidad se relacione sólo con los irracionales trascendentes. Encuentra que los números irracionales introducidos en los libros de texto como magnitudes (en sentido geométrico) tal como resolvió Eudoxio para introducirlos por medio de la teoría de proporciones “ampliada”. Euclides, construyó su teoría de proporciones, apoyándose en las ideas de Eudoxio para medidas de segmentos

tanto conmensurables como inconmensurables, dando un lugar a los nuevos números irracionales (Boyer, 1968).

Realiza un estudio comparativo de cuatro libros de texto, considerando los siguientes indicadores:

- Presentación de los conjuntos numéricos.
- Justificación de nuevos conjuntos numéricos.
- Presentación de la recta geométrica y/o numérica.
- Relaciones de orden (presentes).

Concluye que ninguno de los textos relaciona la continuidad de los números reales con la de la recta geométrica, y que cada uno se caracteriza por distintas entradas al continuo:

- Por medio de una presentación axiomática, utilizando axiomas de orden y de completitud.
- Aceptando implícitamente el continuo numérico y justificando la existencia de números irracionales por medio de magnitudes inconmensurables y demostraciones algebraicas.
- Aceptando sin justificación alguna la existencia de números (reales) que completan la recta numérica.
- Por medio de aproximaciones sucesivas por encajonamientos, dejando abierto el camino hacia la comprensión del continuo.

Las tres primeras entradas son presentaciones clásicas de rápida efectividad, pero que no logran comprender los estudiantes, careciendo de sentido para ellos, y denotando un saber impuesto sin razón alguna de su origen. Cabe destacar que las presentaciones de este orden utilizan con frecuencia la mecanización como transacción de los

conocimientos según Chevallard. La divulgación de este tipo, apoya el estructuralismo y el dogmatismo de las Matemáticas como ciencias duras y poco accesibles. Sólo la última de las entradas que encuentra Vargas, logra construir y dejar el acceso disponible para llegar a la noción de continuidad de los números reales y la recta numérica, lo que es una alarmante denuncia en su trabajo, puesto que de cuatros libros de texto escolar de gran difusión en su país (Colombia), sólo uno apuesta por la mirada constructivista que adherimos.

En un estudio anterior del autor, en su Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática, (Vidal, 2006), estudia el concepto de Raíz cuadrada, lo que permitió dentro de sus conclusiones establecer que el concepto de raíz y de radical, presentaban confusiones en el profesorado de enseñanza media, pues no existía reflexión acerca de la distinción conceptual que estaba también oculta en libros de texto (pues no abordaban tal cuestión). Dentro de las conclusiones de esta investigación citamos la siguiente:

“Se pudo constatar que tanto las instituciones de procedencia de estudios de pregrado, como los años de servicio, no son factores que influyan en las concepciones de los profesores respecto de la confusión entre los conceptos de raíz cuadrada y de radical cuadrático. Existe si una cultura de creencia férrea en lo escrito en los textos de nivel escolar y un desconocimiento de libros de texto más cercanos al saber matemático”. (Vidal, 2006).

Según esta información, probablemente las nuevas y antiguas generaciones de profesores mantengan una visión común de los conceptos de raíz y radical, epístomes del profesorado de matemáticas que trascienden por el valor podríamos decir de “verdad” que le asignan a los textos escolares y a los profesores que los formaron.

Otras investigaciones acerca de los conceptos de raíz y radical son las siguientes:

- Colín y Martínez (2007), en su artículo “De la Aritmética al Cálculo: Un estudio transversal de la Raíz Cuadrada”, exponen la necesidad del estudio del concepto de Raíz cuadrada vista la complejidad que tiene para los estudiantes y las concepciones erróneas que aparecen al momento de vincularla a la resolución de una ecuación

cuadrática del tipo $ax^2 - b = 0$ y también al realizar cálculos aritméticos como en $\sqrt{4} + \sqrt{9}$, donde esta expresión podría tener 4 resultados al combinar las parejas de valores que le son asignados a los radicales cuando se concibe que $\sqrt{4} = \pm 2$ y $\sqrt{9} = \pm 3$. Revisan libros de texto de distintos niveles tanto básicos, de enseñanza secundaria como de uso universitario, encontrando disfunciones en el saber a enseñar divulgado, pues dan a conocer distintos significados del signo radical en los contextos aritméticos, algebraicos y funcionales, lo que conduce a una interpretación “mezclada” la que detona los errores en los estudiantes. Concluye en su trabajo que “el operador $\sqrt{\quad}$ tiene diferentes significados cuando se aplica a números concretos (contexto aritmético), números generalizados (contexto algebraico) y variables (contexto funcional). Las disfunciones escolares en el manejo de este operador en el tránsito de contextos (aritmético, algebraico y funcional) generan fenómenos didácticos específicos”.

- Buhlea y Gómez (2008), en “Sobre raíces y radicales: efectos de dos culturas de enseñanza” documentan la dificultad del aprendizaje que se da por el cambio de significado del signo radical al pasar de la aritmética al álgebra, levantando la hipótesis que tal dificultad es producto de la enseñanza. Analizan comparativamente libros de texto españoles y rumanos, además de un estudio de casos con docentes de ambos países, dando cuenta que los discursos en cada país son distintos, lo que les permite concluir que “en la propuesta de enseñanza en la cual se introducen dentro del álgebra las nociones de raíz y radical no se reproduce la dificultad identificada, lo que sí que ocurre en la propuesta en la que se introducen las nociones de raíz y radical en la aritmética”.

En estas investigaciones se puede evidenciar efectos de la divulgación de los conceptos de raíz y de radical. En esta tesis se rescatan algunos de estos resultados, pero además se profundiza respecto de la realidad de los textos escolares y los programas, precisamente para observar qué ha sucedido durante 40 años, en que han existido

cambios curriculares, pero ¿con cambios en los discursos respecto a esta temática que nos convoca?

Dentro de los antecedentes, creemos importante mostrar algunos avances respecto del creciente interés por el análisis histórico, línea de investigación que alberga al análisis de libros de texto. Así al menos lo indican las siguientes investigaciones:

- Maz y Rico (2007) investigan las “Situaciones asociadas a los Números Negativos en los textos de Matemáticas españoles durante los siglos XVIII y XIX”.
- García (2000) en el “Análisis de contenido del Texto Escolar de Matemática según las exigencias educativas del nuevo milenio”, muestra que los libros de texto no se adaptan en su mayoría a las nuevas exigencias post reforma de las matemáticas modernas en que se trabaja desde el paradigma del constructivismo.
- Villella y Contreras (2005), en su artículo “El conocimiento de los docentes de Matemáticas en relación con la selección y uso de libros de texto”, establecen que los profesores seleccionan los libros de texto sin tener una adecuada preparación disciplinar que les permita criticar los materiales y que el uso de éstos está asociado a sus propias creencias y concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática tal como ellos recibieron su formación.
- Sánchez y Contreras (1998), presentan en su artículo “Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo”, los efectos de una inadecuada transposición didáctica al detectar problemas en el aprendizaje de sus estudiantes que son originados obstáculos y dificultades provenientes de los discursos de los programas y los textos escolares respecto al concepto de límite. Proponen con su investigación, algunos elementos para la elaboración de manuales que faciliten la aprehensión correcta del concepto de límite.

De tal grado de interés es el análisis del contenido del texto escolar que por ejemplo, González y Sierra (2004), proponen una Metodología para el Análisis de libros de texto, la que desarrollan mediante el concepto de punto crítico. Estos dos destacados investigadores en Didáctica de la Matemática, han abocado sus últimos trabajos en esta misma línea, generando más material de consulta al respecto y que puede obtenerse por medio de las revistas de investigación. En 2009, en el XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, su programa (provisorio respecto de la fecha de redacción de esta tesis), destina uno de sus dos seminarios al Análisis de libros de texto, donde participa como ponente el Doctor Alexander Maz, evaluador de la comisión de esta tesis.

Fuente:www.SEIEM.es

De este modo, la transposición al aula de los profesores o de los autores de libros de texto está influenciada desde lo transmitido generacionalmente, lo que en buena medida justifica la elección que para este trabajo de tesis doctoral se ha hecho respecto de los tres períodos en que se analizarán los libros de texto en relación a su exposición acerca de la Radicación.

1.5. Sinopsis de los siguientes capítulos.

Una vez que ya se ha comentado el problema de investigación, la motivación a estudiarlo, sus antecedentes, propósitos e hipótesis puestas en juego, se dan las condiciones de dar un breve adelanto de lo que se encontrará en las páginas siguientes.

En el Capítulo 2 se presenta el Marco Teórico, en el cual se desarrolla un conjunto de temáticas asociadas al campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas, lugar desde donde se toma el posicionamiento epistemológico para dotar de una base sólida a cada uno de los constructos a los que se hace referencia. Se considera para ello elementos de la dimensión didáctica relacionados con la Historia y la Filosofía de las Matemáticas, vinculada al proceso de Transposición Didáctica (que comporta el corazón de esta tesis), la crisis de la enseñanza de las matemáticas con la reforma mundial de las denominadas matemáticas modernas, los fenómenos de comunicación escrita por medio de lo que se instala en las investigaciones relacionadas con el análisis de libros de texto y todo esto en un marco de una visión de las matemáticas como construcción humana ligada a una concepción de la ciencia desde una perspectiva naturalizada y pragmática.

En el Capítulo 3 se expone el Marco Metodológico, en el que se encuentra la fundamentación tanto del paradigma de investigación escogido (cualitativo), como del diseño y las técnicas empleadas. Se exponen igualmente los planes de recogida y análisis de los datos, así como la construcción de instrumentos, los criterios de rigor científico seguidos para culminar con una síntesis esquemática de las fases que dieron luz a esta investigación.

En el Capítulo 4 se entra ya en el propio trabajo “de campo”. Luego de una descripción de la situación socio – política ligada al terreno educacional de cada una de las tres reformas educacionales chilenas acaecidas en el período 1965 – 2009, respectivamente, se realiza un análisis de los programas ministeriales correspondientes siguiendo una matriz construida especialmente para recoger los datos de importancia, los que en la síntesis de este apartado, concurren para formar la caracterización del saber a enseñar promulgado oficialmente por el Ministerio de Educación y que constituirá uno de los tres vértices de la triangulación que se hará en el capítulo 8 para producir las conclusiones finales.

Los Capítulos 5, 6 y 7, están destinados a desarrollar el análisis de los libros de texto (mediante una matriz previamente validada) de cada uno de los tres períodos. Así en el capítulo 5, se expone el saber a enseñar propuesto por los manuales escolares del período 1969 – 1981, el capítulo 6 responde al período 1982 – 2000 y el capítulo 7 al período 2001 – 2009. En la síntesis de cada uno de estos capítulos se concluye un saber a enseñar representativo de cada período que se ha denominado como “Perfil del Saber a Enseñar”.

Se cierra esta investigación con el capítulo 8, en el cual se recuperan los tres perfiles del saber a enseñar obtenidos como producto de los capítulos 5, 6 y 7, respectivamente, de modo que efectuar entre ellos una triangulación que da origen a la caracterización del saber a enseñar de los libros de texto. Esta caracterización como se verá, junto a la de los programas ministeriales (capítulo 4), se triangulan con el saber matemático de referencia, lo que arroja las conclusiones finales en función de los objetivos planteados, las hipótesis y otros elementos que se destacan en relación a las rupturas que se evidencian en la vigilancia epistemológica que se ha llevado a cabo con este estudio.

CAPITULO 2

Marco Teórico

2.1 Introducción.

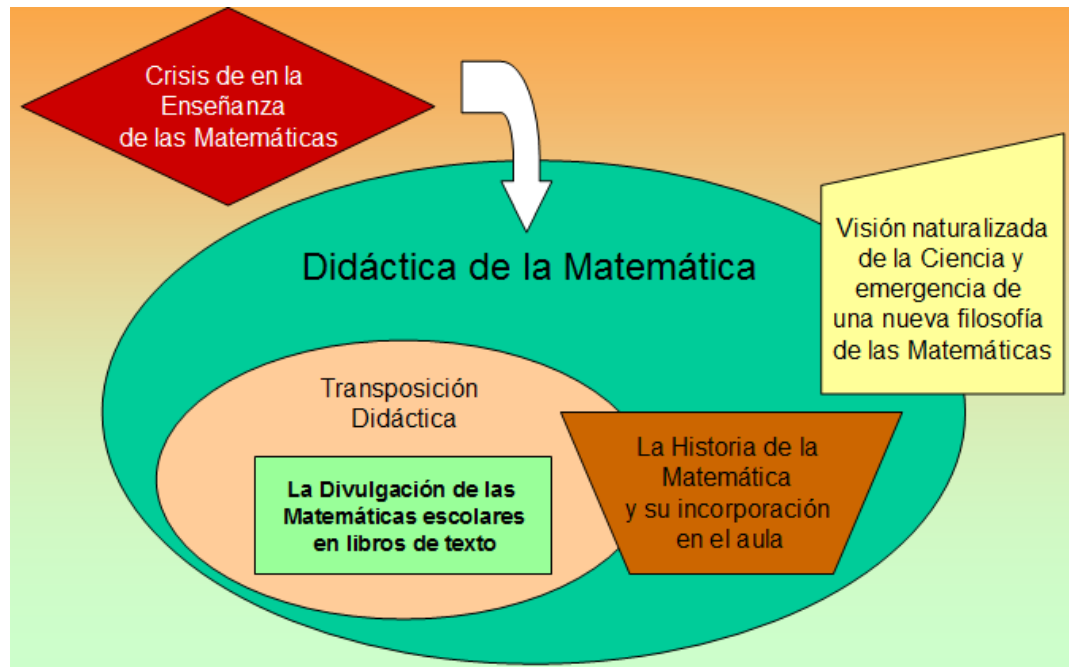
En este capítulo se abordan los referentes teóricos de la investigación. Para el presente estudio, el marco teórico está conformado por las bases epistemológicas que lo sustentan. Éstas son:

- La Didáctica de la Matemática como disciplina científica y Formación docente: En este punto se hará referencia al sentido actual del concepto de Didáctica en el entendido de la emergencia de las Didácticas disciplinares, en particular del desarrollo de la Didáctica de la Matemática, lo que denotará el posicionamiento epistémico al interior de las Ciencias de la Educación y que es adoptado para la realización de esta tesis.
- La Teoría de la Transposición Didáctica: Se encuentra al interior de la Didáctica de la Matemática, reconocida como una de las teorías más relevantes, al punto que ha sido empleada también en su forma genérica, por la Didáctica de las Ciencias Experimentales. En esta tesis, toma su rol protagónico, al corresponderle el rol de hilo conductor de la misma, que permite explicar las rupturas epistemológicas en relación a los procesos de transformación de los saberes matemáticos cuando son dispuestos como materias de enseñanza.
- La Historia de la Matemática y su aplicación en el aula: Para comprender el proceso de transposición didáctica, uno de los elementos centrales está en el conocimiento del origen y evolución de los objetos matemáticos, hasta que han llegado a tener su estatus en el edificio matemático. El paso por la historia es inevitable por al menos dos razones: una, para comprender la construcción del objeto en el marco de la propia matemática y considerar este desarrollo para su construcción en el aula, y por otro por la importancia que se le da en esta investigación a la recuperación de la historia de lo que se enseña, como saber imprescindible del profesor, responsable de

una preparación del escenario de enseñanza – aprendizaje más cercano y más humano, entendiendo las matemáticas en el aula como una construcción social.

- Crisis en la enseñanza de la Matemática: La Reforma de las Matemáticas Modernas.
En el punto anterior se pone el acento en la Historia de la Matemática y por tanto como hemos señalado, de la construcción del objeto matemático para tenerla en cuenta y su relación con el objeto de enseñanza, sin embargo para complementar esta perspectiva, incluimos un hito mundial ocurrido en la Historia de la Educación Matemática, que repercutió en Chile directamente en el primer período en que centraremos nuestro análisis documental (segunda mitad de la década de 1960): La reforma de las matemáticas modernas, suceso que da respuesta a posicionamientos epistemológicos positivistas que se tradujeron en la divulgación de matemáticas a-históricas y sin sentido social.
- La Visión Naturalista Pragmática de la Ciencia y la emergencia de una nueva Filosofía de la Matemática: En este apartado se insiste en el posicionamiento epistemológico adoptado para la realización de esta tesis, desde un enfoque meta-filosófico, describiendo la visión de Ciencia a la que se adhiere en función del cambio paradigmático en la filosofía de las Matemáticas, en su carácter falible. (Lakatos, 1978).
- La divulgación del conocimiento matemático: El caso de los Libros de texto. Se fundamenta el uso de los libros de texto como uno de los principales divulgadores y al mismo tiempo evidencias de un tipo de enseñanza, que revela la epistemología predominante y la forma en que son organizados y trabajados los contenidos en el aula.
- Análisis del concepto de Radical por medio del Modelo evolutivo de S. Toulmin (1977): Finaliza el cuerpo del marco teórico, con la dimensión matemática del concepto de radical, dando cuenta de su construcción histórica, desde su origen en el período griego de la escuela Pitagórica, pasando por la invención y masificación del

signo $\sqrt{\quad}$, hasta su estatus matemático que sugiere la distinción conceptual entre su concepto madre (raíz) y el de radical.



2.1. La Didáctica de la Matemática como disciplina científica y Formación Docente.

Sin duda al hablar de “enseñanza de las matemáticas”, está presente la palabra didáctica. Ian Amos Comenuis introdujo esta palabra en su obra “Didáctica Magna”, dándole el significado de “Arte de enseñar”. De la misma forma aparece en el diccionario de la Real Academia Española. En el Petit Larousse Ilustrado de 1980, la definición es la siguiente: “Ciencia que tiene por objeto los métodos de enseñanza”. Hasta aquí, podemos ver que la Didáctica se reduce a la Metodología.

Entrando en el terreno de la Didáctica de la Matemática, para el pedagogo alemán Heinz Griesel¹, “La Didáctica de la Matemática es la ciencia del desarrollo de las planificaciones realizables en la enseñanza de la Matemática, una interpretación que da importancia a los programas, a las secuencias de enseñanza, a la elaboración de manuales, pero nuevamente reducida al método. Otras interpretaciones relacionadas con la innovación de propuestas de enseñanza se encuentran en la “Didattica della Matematica” de Emma Castelnuovo y “Didáctica Matemática Heurística” de Pedro Puig.

Guy Brousseau, didacta francés, considerado como el precursor de la Didáctica de la Matemática Francesa, concibe tres interpretaciones de la palabra didáctica: Como sinónimo de enseñanza, en que se forja un proyecto social para que un sujeto se apropie de un saber, como conjunto de medios que sirven para enseñar, asociada a la metodología y como el conocimiento del arte de enseñar, describiendo y estudiando la actividad de una disciplina científica.

Desde la década de los años 80’ se ha intentado concebir la Didáctica de la Matemática como una Ciencia preocupada de la comunicación de conocimientos y de sus transformaciones, por medio de una epistemología experimental que intenta teorizar sobre la producción y circulación de los saberes. Su campo de estudio corresponde a los fenómenos que ocurren en la enseñanza de la matemática, relacionados con los alumnos, los contenidos matemáticos y los agentes educativos.

Steiner (1985), indica acerca del estatus de ciencia de la Didáctica de la Matemática, que coexisten dos posturas. Una de ellas niega la posibilidad de llegar a la fundamentación científica. Quienes optan por esta posición, ven la enseñanza de las matemáticas como un arte. Esta posición está muy consolidada en los pedagogos más dogmáticos. La otra postura, señala que si es posible concebir la didáctica como ciencia, por medio de la acción de reducir los problemas a objetos de estudio específicos tales

¹ Citado por I. Guzmán (2000) en Apuntes del curso “Fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas”. PUCV, Chile.

como el contenido, el desarrollo de las destrezas del alumno, los métodos de enseñanza, la interacción en el aula, etc.

La justificación de esta última postura a la que adherimos, la tomamos de D'Amore (2006), quien se basa implícitamente en los trabajos de Khun, Lakatos y Bunge, acerca de las caracterizaciones de un campo científico y reuniéndolas en los elementos que propone Romberg²:

“Está bajo los ojos de todos, la existencia de un gran grupo internacional de investigadores en Didáctica de la Matemática que tienen intereses comunes, para quienes existen problemáticas consideradas centrales y compartidas, que dan un par de decenas de explicaciones de carácter causal, que tienen elaborado un vocabulario común, compartido; tienen sus congresos específicos y sus revistas específicas, al interior de las cuales las propuestas de comunicación o de publicación son analizadas con base en procedimientos ahora ya compartidos ampliamente. Estamos por tanto en pleno, en las condiciones propuestas por Romberg para poder afirmar que la Didáctica de la Matemática tiene todas las características para ser considerada una ciencia consolidada y estable”.

Durante el Quinto Congreso Internacional de Educación Matemática ICME desarrollado en 1984, se formó el grupo TME (Teoría de la Educación Matemática), que tenía por objetivo el definir la Didáctica de la Matemática como ciencia.

Pero la Didáctica de la Matemática es una Ciencia Experimental que se desarrolla relacionándose con otras áreas del saber como la Epistemología y Filosofía de las Matemáticas, la Sociología y la Psicología. En especial, esta última, proporcionó los marcos teóricos por mucho tiempo para la Didáctica entendida como metodología. En

² T. Romberg (1988) “Necessary Ingredients for a Theory of Mathematics Education”. En Steiner, H.G. y Varmandel, A. (eds.) (1988). Propone estas caracterizaciones para dotar del estatus de ciencia a un campo de investigación:

- Debe existir un conjunto de investigadores que demostrarían intereses en común; en otras palabras, deberán hacer problemáticas centrales que guían el trabajo de los investigadores y que so compartidas.
- Las explicaciones dadas por los investigadores deben ser de tipo causal.
- El grupo de investigadores debe haber elaborado un vocabulario y una síntesis común, sobre el cual es grupo está de acuerdo.
- El grupo debe haber elaborado procedimientos propios para aceptar o refutar los enunciados.

efecto, desde los años 60 en E.E.U.U. y en países occidentales se puso mayor énfasis en la enseñanza de las Matemáticas, siendo la psicología la que por largo tiempo diera las directrices, apareciendo la corriente conductista basada en acciones de tipo estímulo – respuesta, donde el avance o retroceso se expresaba en conductas observables. Armendáriz, Azcarate y Deulefeu (1993), señalan al respecto “se da una gran importancia a la práctica y a la ejercitación de rutinas con la consiguiente hipertrofia de lo sintáctico. Las secuencias en el aprendizaje son enormemente rígidas”. Sin embargo, en la actualidad, el principio explicativo más compartido sobre el aprendizaje en general es el de la importancia de la actividad mental constructivista del alumno, en una mirada renovada que como hemos dicho, considera la Didáctica de la Matemática como Disciplina experimental.

Por su juventud, ha desarrollado sus paradigmas y controversias, recientemente. En los países anglosajones en lugar de Didáctica de la Matemática como se denomina en el continente europeo, se habla de Educación Matemática. Al respecto, Jeremy Kilpatrick reconocido didacta de las Matemáticas en los países anglosajones, no encuentra más que una diferencia en los nombres, ya que ambos paradigmas de investigación se nutren según él, en los aportes de la sociología, la lingüística, la psicología y la antropología.

En el contexto latinoamericano, suele hablarse de Matemática Educativa. En Chile en tanto, encontramos un Programa de Magíster en Didáctica de la Matemática, impartido por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y también (hasta el 2009) dos programas de postgrado (Magíster) en Educación Matemática.

La Didáctica de la Matemática, puede verse hoy como una disciplina emergente, con características propias y de carácter multidisciplinar, con un campo teórico – práctico específico que no se traduce en la ingenua suma de las áreas del conocimiento

con que se relaciona, siendo cada vez una mejor aproximación para describir y explicar los fenómenos del aula.

2.2.La Teoría de la Transposición Didáctica.

Desde las teorías de la Didáctica de las Matemáticas, en cuanto a la comunicación del conocimiento matemático, un investigador despersonaliza el saber, es decir, suprime las reflexiones inútiles, los errores, los caminos tortuosos o demasiado largos que lo llevaron a la divergencia. En una segunda etapa, descontextualiza el saber, esto es, suprime la historia anterior (tanteos, pistas falsas) y busca el contexto más general en que su resultado sea verdadero para hacerlo publicable. Este proceso de comunicación, no llega más allá de la comunidad científica. Para llevar un conocimiento al aula, se adopta siempre una hipótesis de aprendizaje constructivista que se resume diciendo que se supone que el aprendiz construye sus conocimientos primero por su actividad propia. Se precisa esta hipótesis considerando que la situación de aprendizaje ideal es aquella en la cual el alumno es enfrentado a un problema que debe ser resuelto. Así el maestro busca que el alumno reconstruya un saber, lo re-contextualice y lo re-personalice, lo que se ve como el proceso inverso al del investigador. De este modo, el proceso por el que pasa el alumno consta de una génesis artificial del saber, en relación a la génesis natural histórica que dio origen al saber matemático.

La Radicación tiene un lugar en el Edificio Matemático (como saber sabio), que no es el mismo que el que se sitúa en la matemática escolar (Saber enseñado). La distancia que hay entre ambos saberes, se produce por la serie de transformaciones que los hacen accesible a un determinado nivel. Estas transformaciones las estudia la Teoría de la Transposición Didáctica de Yves Chevallard (1985), quien proporciona la columna vertebral para adquirir los elementos claves para detectar o buscar posibles explicaciones acerca de las anomalías en la enseñanza del álgebra de radicales. Considerando que el

saber del profesor y su relación con el saber sabio es base de este estudio, se cita a Chevallard:

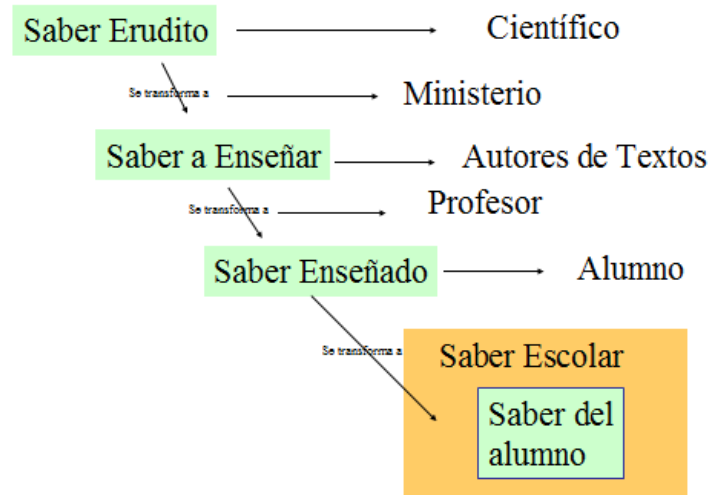
“El profesor tiene que enseñar una parte del “saber sabio o erudito”, del cual los matemáticos profesionales e investigadores puros son sus poseedores y fabricantes. La sociedad demanda enseñar una parte de este saber, lo que supone que ella debe tener utilidad social. Para responder a esta demanda, es necesario transformar el conocimiento para que se vuelva enseñable a un nivel dado. Este punto es clave en cuanto a que el profesor debe cuestionarse acerca de su relación con el saber a enseñar, así como con el saber erudito”.

2.2.1. Los 5 actos de la Transposición Didáctica.

Es claro que el Saber Sabio (de los matemáticos) y el Saber Escolar (de los estudiantes) no es el mismo. El proceso de transposición didáctica se puede concebir como el desarrollo de 5 etapas en las que se transforma el Saber matemático en un saber del alumno.

Henry (1995), en su artículo del IREM de Bensaçon “La Transposition Didactique, didactiques des mathematiques”, llama a estas etapas los 5 actos de la transposición didáctica. He aquí la descripción de cada uno, adaptado a esta investigación:

Esquema de la Transposición didáctica



1º acto: Los protagonistas de este primer acto son los matemáticos, quienes tienen por misión crear nuevos conocimientos que les permitan resolver problemas que con sus conocimientos previos no les es posible. Construye o reconstruye herramientas, escoge lo que es útil y comunica su descubrimiento haciéndolo lo más general posible, borrando todos los pasos en falso, errores y falsas conclusiones. Estos nuevos aportes son publicados por la comunidad científica manteniendo de este modo al día el “libro del Saber”. El álgebra de radicales, tiene aquí su estatus matemático, es decir, es un componente más del edificio matemático.

2º acto: La noosfera (sistema social de enseñanza), da cuenta de todos los conocimientos existentes, aquellos que son pertinentes para la formación matemática de los jóvenes, lo que depende de varios factores tales como tipo de sociedad, nivel de desarrollo, tipo de sistema educativo, etc. El Ministerio de Educación es el agente que decide junto a su equipo de expertos cuáles son los objetos a enseñar y el álgebra de radicales es uno de los contenidos matemáticos que aparece en los tres programas ministeriales que se revisarán.

Una vez lista la selección lo que se va a enseñar, se elabora “el texto del saber a enseñar”, el que debe integrarse en el currículo en secuencias de hipótesis de aprendizaje. Así se tendrá el manual del profesor, es decir, el Programa de estudio que contempla el objeto Raíz Cuadrada en los niveles NB5, NM1 y NM3 en forma explícita. En él aparecen indicaciones del tratamiento de los temas, jerarquía de los conocimientos, etc.

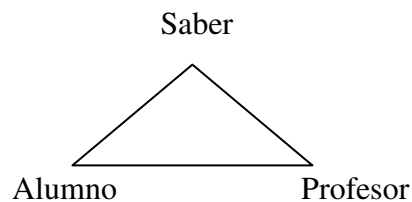
Para hacer un texto de saber a enseñar, los expertos deben re-escribir las definiciones, propiedades y demostraciones para lograr una articulación lógica, coherente y accesible a los estudiantes. Este acto se desarrollará en el capítulo II.

3° acto: Generalmente los profesores prefieren preparar sus clases utilizando textos que ofrece el mercado o aquellos distribuidos por el ministerio de educación, en lugar de emplear los propios manuales (Villella, 2007). El 3° acto de la transposición didáctica se refiere a la elaboración del Saber Escolar, que es difundido por los textos del alumno. Las diversas editoriales presentan sus textos proponiendo una organización del programa, aportan ilustraciones de los temas, ejercicios de entrenamiento y problemas. Estas obras servirán durante un tiempo como referencia a la comunidad: profesores, alumnos y apoderados. De ahí la importancia del estudio centrado en manuales escolares, tema que será tratado en detalle más adelante en la sección 2.9 de este mismo capítulo. De los libros de texto se desprende un cierto saber que contribuye a la instalación de una cultura particular, integrada por todos aquellos contemporáneos de una misma época escolar. Abarcaremos este acto en los capítulos 6, 6 y 7, analizando el tratamiento de la radicación tanto en los programas oficiales como en textos escolares de 3 períodos en Chile.

4° acto: El protagonista en este acto es el profesor, quien tiene la responsabilidad de administrar esta transposición didáctica, adaptar a sus conocimientos los objetos a enseñar, insertarlos en el saber escolar y organizarlos en el tiempo. Sus decisiones son

importantísimas porque ellas incidirán en la percepción del saber de los estudiantes. Este acto y el 5to que se describe a continuación, no se presenta en esta tesis, por estar fuera de los alcances deseados.

5º acto: Lo que el profesor enseña no es lo mismo que finalmente retienen sus alumnos. Aquí hay otra transformación de la que se hacen cargo los estudiantes. Ellos protagonizan el 5º acto de la transposición didáctica: transforman el saber enseñado a saber del alumno. Así la interacción profesor – alumno junto a un saber producto de la transposición es lo que define el triángulo didáctico:



cuya dialéctica es el motor del aprendizaje.

De estos cinco actos, nos centraremos sólo en los primeros tres, que tienen relación con las transformaciones del saber al momento que llega a los docentes sea por los programas oficiales del Ministerio de Educación o bien por los libros de texto, de manera de fijar la problemática antes de la administración que hace el docente de la transposición didáctica. El profesor interviene en el saber a enseñar trasponiéndolo para que se convierta en saber enseñado. El saber a enseñar no se reduce al programa, pues este se interpreta según el enseñante. Por esto, Chevallard habla de la existencia de un “texto del saber” el que no está completamente escrito en ninguna parte, sin embargo, en el presente estudio, se considera que la referencia de “validez” del profesor es algún libro de texto que le sirve para obtener ideas y preparar sus clases entre otros usos que serán discutidos en mayor detalle en la sección 2.7.

El estudio de la transposición didáctica implica una “vigilancia epistemológica”, esto es, examinar la distancia, vista por la deformación que existe entre el objeto de saber (del saber erudito) y el objeto de enseñanza (del saber a enseñar). A veces no queda más que una nomenclatura en común y en el peor de los casos, un lenguaje pseudo-erudito.

En casos extremos se habla de “ruptura epistemológica”, por lo que convendrá averiguar los motivos de estas rupturas, que es la tarea de esta tesis en el ámbito de la radicación. El saber cultural entonces, al parecer siguiendo esta línea, es consecuencia de las diversas rupturas y fallas o ausencia de la vigilancia epistemológica de lo que se enseña en las aulas. Ahora bien, según Guzmán (2000), las características del Saber Enseñado, se originan a partir de la examinación de las dos siguientes exigencias:

1. La programación (orden) en el tiempo.

El saber enseñado se ordena en una progresión del tiempo. El tiempo de enseñanza o “tiempo didáctico”, esto es, el tiempo definido por el texto del saber, es decir, el programa, existe gracias al tiempo legal de aprendizaje. Por ejemplo, según los programas hay una edad legal en que los alumnos deben saber leer, otra para saber escribir, etc. Si esto no ocurre, hay fracaso del sistema educativo. La clase de Matemáticas trata de progresar siguiendo una estructura lógica, lineal. Así para abordar nuevas ideas se requiere de la conexión continua y coherente de conocimientos previos. Se pueden apreciar dos diferencias entre el enseñante y el enseñado y que pensionan esta relación temporal:

- Diferencia en la cronogénesis: El profesor y el alumno no tienen la misma posición en el tiempo en relación al saber. El profesor sabe desde antes, y además, el orden en que es presentado un saber no necesariamente coincide con su orden histórico.
- Diferencia en la topogénesis: El alumno, luego de una enseñanza, no está en el mismo lugar que el enseñante. Este último maneja el saber desde diferentes

perspectivas. En Matemáticas, el profesor está al lado de la teoría, mientras que el alumno está del lado de la práctica. No basta “saber” el contenido para poder “hacer” el curso.

2. Publicidad del saber.

El saber a transmitir está definido explícitamente, como selección del saber erudito. Algunas cosas son para saberlas, otras no, las nociones y técnicas figuran en el saber erudito y les son indispensables para los investigadores. Se distingue en el texto del saber matemático, objetos de enseñanza y objetivos de enseñanza:

- Los objetos de enseñanza en matemáticas se introducen explícitamente por una definición, a la que sigue la lista de propiedades y el estudio sistemático de sus aplicaciones.
- Los objetivos de enseñanza del tipo: saber razonar, saber argumentar, saber resolver problemas, no corresponden a la enseñanza explícita y sistemática. Para ello es necesario insertar “objetos de saber auxiliares” como por ejemplo, las ecuaciones para hacer del objetivo “saber resolver problemas” un objeto de saber. Análogamente sucede con las demostraciones y el uso de parámetros.

Para evitar el fracaso escolar, se proceden a hacer algunas transacciones, como la algoritmización que brinda un medio de transacción entre el saber enseñado y el saber a saber. Sin embargo, el problema es quedarse sólo en esa negociación.

Chevallard (1985) considera que el sistema de enseñanza es un sistema abierto, en cuyo entorno llamado NOOSFERA participan los sabios, los padres y la decisión política. La consideración de este medio exterior condice a introducir el saber de los padres: Saber Sabio - Saber Enseñado - Saber de los padres.

Hay equilibrio entre el sistema de enseñanza y su entorno cuando:

- i) El Saber Enseñado está suficientemente cerca del saber sabio, lo que lo legitima.

- ii) El saber enseñado está suficientemente cerca del saber de los padres, lo que le da su legitimidad o al menos su prestigio a la escuela (si no los padres tendrían la impresión de poder enseñar ellos mismos, lo que sus niños aprenden en el sistema educativo. El acto de enseñar perdería todo su carácter técnico, pues no necesitaría ninguna competencia.

Hay desequilibrio entre el sistema de enseñanza y su entorno cuando:

- i) El saber enseñado está demasiado lejos del saber sabio ó
- ii) El saber enseñando está demasiado cerca del saber de los padres.

En el desarrollo de los capítulos 5, 6 y 7, analizare las rupturas epistemológicas que se pueden descubrir examinando las distancias entre el saber matemático erudito y el conjunto de sus transformaciones al programa ministerial y a los libros de texto. De ahí la importancia del capítulo 8, que consiste en la triangulación de estos tres saberes.

2.3.La Historia de la Matemática y su incorporación en el aula.

Imaginemos por un momento que no tenemos historia, que pasamos por la vida sin dejar huella alguna. Lamentable sería si cada generación de seres humanos debiera de reconstruir lo ya hecho por otros en la más espléndida ignorancia. Sin embargo, esta situación descrita si tiene al menos un representante: la enseñanza de la Matemática. El que ésta ciencia se haya convertido para el hombre común en un inalcanzable, incomprensible y abstracto tema para él, se remite probablemente a un desencanto que es el mismo que tienen muchos niños y jóvenes de múltiples generaciones que han recibido una matemática escolar llena de definiciones, propiedades, operaciones y fórmulas en forma de islas de contenidos y sin historia.

Esto ha llevado a varios investigadores en Didáctica de la Matemática en Francia, España, México, Alemania, entre otros países, a estudiar el uso de la Historia de la Matemática en el aula. Cabe señalar al respecto algunas nociones epistémicas en cuanto a la posición que se aborda en la Historia de las Ciencias como lo señala Barona (1994) y que se ajustan como caso particular a la Historia de la Matemática:

“En el campo de la Historia de la Ciencia, la relevancia histórica de los hechos y de los acontecimientos no está sólo en función del criterio del historiador, sino que además es la propia evolución de la ciencia la que establece su propia forma de selección de lo que es relevante y lo que no lo es, de lo que debe permanecer y de lo que debe ser abandonado”.

Desde esta mirada entonces, se entiende que es la propia evolución de la Matemática, en especial de los objetos matemáticos que son designados como saberes a enseñar, los que también por su propia historia indican si son o no pertinentes para ser considerados en el aula. No se trata pues, de una visión presentista, es decir, con desvalorización de lo pasado, que mira sólo lo antiguo como la ruta que permitió llegar a lo nuevo, parte de lo que en la enseñanza ha llevado a presentar biografías, narraciones de anécdotas o relatos de descubrimientos que en palabras de Barona, vienen siendo una burda crónica de sucesos sino muy por el contrario, la idea es presentar explicaciones de los contextos en que se desarrollan los objetos matemáticos a enseñar, los problemas que intentaron solucionar en su momento, su cambio conceptual en el tiempo, y comprender esto para utilizarlo como base orientadora del planeamiento de clases. El caso de los números irracionales, ha provocado conflictos colectivos en la Historia, dignos de discusión y simulación en la sala de clases para convertirse en un elemento con sentido humano.

La Historia de la Ciencia muestra distintas formas de estudiar un episodio en los sentidos descritos, tal como Toulmin en su obra “La comprensión Humana” de 1977, nos invita a comprender el cambio conceptual, por medio de un abordaje vertical (en

relación al tiempo, mirar su evolución) u horizontal (en un tiempo determinado establecer sus conexiones con aspectos sociales, institucionales, etc.).

Opto por una visión historiográfica recurrente. Propogo una incorporación de la Historia de la Matemática en que los docentes y alumnos se impliquen en ella, como si fueran parte de ella. Esto da sentido a la comprensión de los objetos matemáticos y de su construcción paulatina, acercando la Matemática a los estudiantes.

La importancia de la Historia de la Matemática en el aula, radica en producir el anhelado acercamiento de algunos estudiantes que se verán atraídos por este enfoque, lo que puede ser propicio para no todos los contenidos según el nivel al que corresponden en los Programas de Matemáticas escolares:

“...Pero lo que si cabe y es recomendable, es aprovechar los temas que se presten para ello, para informar sobre la historia de su origen y los alicientes y dificultades con que se encontraron sus creadores. La presentación histórica de muchos temas de Matemática, es un complemento a los mismos que seguramente interesará a algunos alumnos, a los cuales se podrá suministrar información complementaria para ayudar a satisfacer su interés natural y tal vez despertar vocaciones por la historia o la epistemología de las ciencias. La escuela debe abrir el máximo de ventanas al conocimiento, para que cada alumno dirija su atención hacia lo que más le atraiga”.

Kazim (1980) citado por Santaló (1994), da algunos elementos para incorporar la Historia de la Matemática en la enseñanza media:

- a) Ejemplos de casos en que la matemática ha progresado gracias a la idea de generalizar resultados conocidos. Observar que casi todos los grandes descubrimientos tienen sus precursores.
- b) Existencia de problemas que se enuncian fácilmente y que sin embargo, todavía no han podido ser resueltos.
- c) Lenta evolución de los conceptos de las distintas clases de números (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, complejos) y sus métodos de cálculo. Discusiones que se originan y dificultades que aparecen cada vez que se introduce

un nuevo concepto, generalmente de manera oscura, hasta su paulatina clarificación.

- d) Ejemplos de resultados que nacieron como puramente teóricos y que luego resultaron de mucho interés práctico.
- e) Importancia de un simbolismo adecuado para el progreso de la matemática.
- f) Existencia de grandes matemáticos cuya ocupación no era la de un matemático profesional, sino que tenían otras profesiones.

A esta lista podemos agregar:

- g) Conocimiento de otras civilizaciones y de sus formas de calcular, sus tipos de construcciones arquitectónicas, su arte, su escritura, y en general, generar actividades integradas con otros subsectores de aprendizaje.
- h) Conocer pugnas, controversias, y otros estados de desacuerdos entre científicos y matemáticos, intereses personales de los científicos, de las instituciones, modos de divulgar la ciencia.

Al respecto comienzan a crearse en el mundo en un período posterior a la Reforma de las Matemáticas Modernas, (reforma que impuso los contenidos con carácter a-histórico), una serie de grupos de investigadores en Historia de la Matemática. La sistematización que hace Schubring (1983) citado por Sierra (1997) es la siguiente, en que presenta los grupos y trabajos que aparecen:

1. Fundación del Grupo Inter – IREM (Institutes de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques) cuyo objetivo es la utilización de la Historia de la Matemática en su enseñanza.
2. Grupo Internacional de Estudio sobre las relaciones entre Historia y Pedagogía de las Matemáticas (HPM).
3. Trabajos que estudian las relaciones entre la Historia y la enseñanza de las Matemáticas, bajo distintos puntos de vista: Janke, Otte, Schubring en Bielefeld,

Pyenson en Montreal, D'hombres en Nantes, Eccarius en Eisenach y Filloy en México.

4. Publicación de trabajos de enseñanza de las Matemáticas desde el punto de vista de sus enseñantes: Howson en Southampton.
5. Publicación de trabajos acerca de la historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática, como los de Glaeser en Estraburgo y Schmidt en Colonia.

Por su parte, Sierra (1997), presenta algunas razones para considerar la Historia de las Matemáticas en su enseñanza:

“Para el profesor, constituye un antídoto contra el formalismo y el aislamiento de conocimiento matemático y un conjunto de medios que le permiten apropiarse mejor de dicho conocimiento, a la vez que le ayudan a ordenar la presentación de los temas del currículo. La exploración de la Historia por parte del profesor, le ayuda igualmente a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los propios matemáticos (que a veces se reproducen en los alumnos), así como la visión de la actividad matemática, como actividad humana con sus glorias y sus miserias. Para los alumnos prepara un terreno donde las matemáticas dejan de jugar el papel de edificio acabado, reestableciéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje. Además, facilita conocer la génesis de los conceptos y los problemas que han pretendido resolver, ayudando a su comprensión”.

Se observa de este modo la importancia que este investigador le atribuye a la Historia de la Matemática y su uso aunque señala también que no debe ser un fin en sí mismo, sino estar al servicio de la enseñanza.

Otro autor que trabaja esta línea es Fauvel (1991), quien entrega once puntos u orientaciones para con los alumnos:

- Mencionar anécdotas matemáticas del pasado.
- Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos.
- Fomentar en los alumnos al comprensión de los problemas históricos cuya solución a dado lugar a los distintos conceptos que aparecen en clase.
- Impartir lecciones de Historia de la Matemática.

- Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado.
- Fomentar la creación de posters exposiciones u otros proyectos con un tema histórico.
- Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado.
- Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos.
- Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje.
- Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico.
- Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico.

Por su parte, citado por Maz (2003), algunas de las razones para la su utilización son:

1. Ayuda e incrementa la motivación para el aprendizaje.
2. Muestra el aspecto humano de las matemáticas.
3. Cambia en los alumnos su percepción de las matemáticas.
4. Ayuda al desarrollo de un acercamiento multicultural.
5. Provee la posibilidad de un trabajo interdisciplinario con otros maestros.
6. El desarrollo histórico ayuda a ordenar la presentación de los tópicos en el currículo.
7. Indica cómo los conceptos fueron desarrollándose, ayudando esto a su comprensión.
8. Los alumnos sienten bienestar al realizar esto, y no hacerlo únicamente con unos problemas.

Chaves y Salazar (2003), realizan con estudiantes de secundaria de Costa Rica, una experiencia en que utilizan la Historia de la Matemática como recurso metodológico para la enseñanza – aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas. De dicho trabajo concluyen:

En cuanto a la enseñanza, la Historia de la Matemática:

- Promueve de un cambio de actitud hacia la matemática.
- Ayuda para explicar y superar obstáculos epistemológicos.
- Incentiva la reflexión y una actitud crítica del estudiante.
- Funciona como integrador de la matemática con otras disciplinas.
- Debe estar presente en la formación de educadores de la matemática.
- Fomenta el interés y la motivación de los alumnos hacia la matemática.

En cuanto a los procesos de aprendizaje permite:

- La contextualización histórica de un concepto o tema.
- La correlación entre el estudio de un concepto y su evolución histórica.
- La recreación de problemas matemáticos históricos.
- La utilización de material concreto y de recursos visuales.
- El despliegue de material anecdótico y biográfico de personajes matemáticos.
- Asignar trabajos extra-clase (exposiciones, diseño de representaciones).
- Introducir expresiones literarias históricas referidas a la matemática (versos, diálogos, metáforas, proverbios y analogías).

Para Maz (1999), el por qué y el para qué de la incorporación de la Historia de las Matemáticas en el aula, tiene relación con el aspecto cultural, humanístico, interdisciplinar y su posibilidad de organizar el currículo. En su artículo, presenta las siguientes interrogantes elaboradas por el matemático Alemán Hans Freudenthal (1981):

- ¿Debe un profesor de matemáticas saber algo sobre la historia de las matemáticas?
- ¿Cuál puede ser el uso de la Historia de las Matemáticas?
- ¿Qué saben los matemáticos sobre la historia de su ciencia?

Así, podemos ver que hoy en día es una preocupación mundial creciente, el considerar la Historia de la Matemática como componente de la Educación Matemática y como se verá y justificará en el diseño metodológico que hemos seleccionado para esta tesis, tal componente tiene en la actualidad por estos mismos motivos su propia

línea de investigación al interior de la Didáctica de la Matemática: El análisis histórico – epistemológico.

2.5. Crisis en la enseñanza de la Matemática: La Reforma de las Matemáticas Modernas.

Muchos estudiantes egresados de la enseñanza media en Chile, e incluso profesores de matemática evidencian un desconocimiento tanto de la génesis como de la evolución de una buena parte de los objetos matemáticos que enseñan. Esta afirmación se verifica:

- Al preguntar directamente acerca de este hecho a los mismos protagonistas, puesto que en el caso de los profesores, por lo general no han recibido una formación que incorpore la Historia de la Matemática y en los casos que la han tenido como asignatura, ha sido desde una mirada anacrónica. En el caso de los alumnos, el currículo no considera un planeamiento desde esta perspectiva, las orientaciones metodológicas al respecto no cubren esta necesidad y cuando lo hacen sólo es en términos también anacrónicos. Por otra parte, los docentes no están preparados por lo indicado anteriormente para este trabajo de contextualización.
- Observando clases, analizando las planificaciones, los cuadernos de los alumnos, y los materiales que confecciona el profesor puesto que los profesores no consideran el pasado y la construcción de los objetos que enseñan, como hemos dicho, por desconocimiento en su formación, incluso continua.
- Analizando los libros de texto que usa el profesor, ya sea como texto guía del curso, como texto de consulta y/o como referencia de la dirección y énfasis que da en su clase. Este recurso también carece de una visión diacrónica de la Historia de la Matemática, como lo veremos en el desarrollo de la Tesis.

- Por la fragmentación de los contenidos que presentan los profesores de Matemática de enseñanza media, precisamente por la ausencia del conocimiento histórico de ella.

Aquí es donde entonces la Historia de la Matemática toma sentido como un elemento unificador de las instancias de origen, evolución, aplicación y contextualización e integración de los objetos matemáticos para ser considerados en la preparación de hipótesis de enseñanza – aprendizaje y evaluación de éstos, influyendo en la participación del profesor de la transposición didáctica de los saberes eruditos a saberes escolares y por cierto del evolutivo cambio conceptual.

La enseñanza de la matemática en el tiempo y la formación del profesorado en matemática, (veremos específicamente durante el siglo XX en el mundo con su respectiva repercusión en Chile) se ha visto influenciada por 3 distintas corrientes con ciertos matices unas de otras, ocasionadas por el cruce de las epistemologías de los profesores y académicos que han participado de más de una transformación. El suceso de impacto mundial que produce estas tres corrientes tuvo lugar durante la década de los 60' y que venía ya dándose en matemática como una consecuencia del Círculo de Viena (integrado por positivistas para los cuales las matemáticas no tienen relación con el mundo, considerándolas como solo tautologías o serie de convenciones de naturaleza lingüística y sintáctica como indica la posición de Carnap) en relación a la enseñanza de las Ciencias: la conformación del grupo de matemáticos que se hicieron llamar Nicolás Bourbaki (1935 – a la fecha), quienes proponen a partir de la teoría de conjuntos cómo deben enseñarse las matemáticas y dando directrices para la elaboración de libros de texto que se basen en el rigor y la axiomatización.

¿Cómo se origina la Reforma de las Matemáticas Modernas?. La respuesta aparece en 1958, en Edimburgo, Escocia, lugar en que en el Congreso Internacional de Matemáticos de ese año se comienza a manifestar la necesidad de cambiar la enseñanza

de las matemáticas en el mundo occidental, debido al negativo informe que presentaron 5 participantes norteamericanos que después de la puesta en órbita del SPUTNIK por parte de los rusos, provocó elevados temores respecto a que ellos fueran los próximos conquistadores del mundo.

Los contenidos que la reforma hizo introducir en la enseñanza fueron: Introducción a la teoría de conjuntos (desde niveles pre – escolares), simbolismo moderno, elementos del álgebra lineal y geometría afín, erradicando de los currículos la geometría euclideana, introducción a las estructuras algebraicas y de sistemas axiomatizados, algebrización de la trigonometría entre otros.

Aunque parezca extraño que se destituyera la geometría de Euclides, siendo que ésta manifestaba una primera “escuela” para la axiomatización, quedó completamente fuera del interés de esta agrupación de matemáticos por la incorporación de la geometría vectorial, los espacios vectoriales (como estructura algebraica), en un intento de algebrizar la geometría, siguiendo la huella que dejó Descartes. Se cuenta que tanto fue el énfasis en dicha destitución que en el seminario de 1959 al que llamó la Organización de Cooperación Económica Europea (OCEE)³, realizado en Royaumont, Francia, el Matemático Bourbakista Jean Dieudonné lanzó en su exposición inaugural su famoso grito de guerra “que se vaya Euclides”. (Ruiz, 1996).

La rapidez con que se requería que los estudiantes aprendieran matemáticas lo más cercanas a las eruditas, era sin duda el gran desafío como también la responsabilidad que se propusieron asumir, todo esto por la desventaja que sintieron fuertemente los norteamericanos (muy influyentes en occidente) respecto a los rusos.

³ En aquella época, ésta organización estaba en París. Es la Actual Organización de Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE).

Se trataba entonces de introducir lo más tempranamente posible las matemáticas modernas, como se hizo con la teoría de conjuntos en educación infantil. Se pensaba que de no enseñar las matemáticas modernas del siglo XX a nivel primario y secundario, se estaban enseñando contenidos obsoletos. Los matemáticos profesionales veían que las matemáticas previas a la reforma no sólo eran inadecuadas para el avance de las mismas, sino también acusaban la existencia de definiciones y tratamientos imprecisos de las matemáticas tradicionales como culpables del fracaso de la adquisición de conocimientos matemáticos. Una buena síntesis de lo perjudicial que resultó esta reforma para podríamos decir la “salud” matemática mundial, es la que hacen Nuñez y Font (1995).

- a) Deductivismo exagerado: Las matemáticas se presentaban como unos conocimientos terminados y organizados deductivamente. Un claro impedimento para “Hacer Matemáticas” en el aula.
- b) Definiciones Formalizadas: Se enseñaban muy buenas aproximaciones al saber erudito, las que contaban con un excesivo simbolismo, su manipulación por tanto mecánica, aislamiento con otros conceptos y descontextualización.
- c) Exceso de generalización y por tanto falta de procesos de abstracción, yendo de lo más general a lo más particular, ocultando la propia naturaleza de la génesis de los objetos matemáticos.
- d) Las matemáticas por las matemáticas: Los objetos enseñados prácticamente no tenían relación con otras áreas del conocimiento, ocultando sus aplicaciones externas, lo que llevó a la generación de preguntas sin respuesta del tipo: ¿Y esto, para qué sirve?.

Morris Kline (1908-1992) doctorado en Matemáticas en EEUU, se ocupó siempre de la enseñanza, filosofía e historia de las matemáticas, tensionando la visión mecanicista y fragmentada de la matemática ocasionada por las presentaciones axiomáticas respecto de una matemática en contexto, con aplicaciones y usos en

oposición a su versión a histórica. Dentro de sus varios ensayos, escribe en 1973, “El Fracaso de las Matemáticas Modernas: ¿Por qué Juanito no sabe sumar?”, material en que expone la “tragedia” de llevar el excesivo rigor y la presentación axiomática en primero lugar y como énfasis local de todo contenido matemático, lo que favoreció a la imagen dogmática de la matemática, la frustración de muchos estudiantes y el empleo de la mecanización como agente moderador de las evaluaciones en matemáticas.

Otro opositor a las Matemáticas modernas fue el Alemán Hans Freudenthal, quien participa en la fundación de distintas agrupaciones en el marco de la Epistemología de la Educación Matemática Realista (EMR) durante la década de los 80’, la que se puede aplicar por medio de un proceso que denomina Matematización (pensar la matemática como una actividad humana). Freudenthal propone una metodología para la investigación en Educación Matemática, la que llama Fenomenología Didáctica, la cual se desarrolla por medio de la búsqueda de contextos y situaciones que desde la realidad, requieran de organización matemática, en que la Historia de la Matemática y las producciones e innovaciones espontáneas de los alumnos juegan el rol principal.

Varias son las propuestas que aparecen para intentar resolver la encrucijada que llevó el fracaso de la reforma. Una de ellas fue la línea denominada “semántica” entendiéndose con este término lo que se relaciona con la construcción de significado por parte del estudiante. Algunos teóricos representantes de esta línea fueron Piaget, Bruner y Dienes, quienes ponen mucha atención sobre el uso de materiales concretos para la enseñanza de conceptos tan abstractos como los matemáticos, lo que hace entrever, e incluso se constata en sus obras, que siguen considerando la era estructuralista de la reforma, pero atacando el problema por medio de “etapas” de aprendizaje entre los que más destacan las fases de manipulación, representación y simbólica en que estos tres investigadores coinciden.

Finalmente a modo de resumen, podemos establecer que la Reforma de las Matemáticas Modernas produce un quiebre temporal en 4 períodos que se destacan por las epistemologías predominantes en la enseñanza de las matemáticas:

- Período 1: Previo a la Reforma, esto es, anterior las aproximaciones a los años 60' y en que predomina una visión mecanicista o algorítmica, justificada en cierto modo por la ausencia de calculadoras y computadores, siendo de gran utilidad los libros que contenían tablas logarítmicas, trigonométricas, valores estadísticos, etc.
- Período 2: Conformado por el tiempo que duró la ejecución de la reforma, cuya epistemología predominante era la estructuralista. En Chile, esta visión aparece con la reforma de 1965 y dura hasta la reforma de 1981, sin embargo, los docentes formados en este período siguen con su formación intacta, incluso hasta nuestros días.
- Período 3: Corresponde al tiempo inmediatamente posterior a la reforma en que apareció la línea semántica, la que en los años 80' se instaló también en Chile, pero con un marco de la psicología del aprendizaje de acento conductista.
- Período 4: Corresponde a la actual epistemología constructivista en la que se inspira la Didáctica de las Matemáticas como ciencia experimental y la Didáctica de las Ciencias. Algunos avances se han visto al respecto con la última reforma a partir de fines de la década 90' en Chile.

2.6. La emergencia de una nueva Filosofía de las Matemáticas y la visión Naturalizada y Pragmática de la Ciencia (en post 1977).

Desde los primeros esbozos de la Filosofía de las Ciencias y en particular de las Matemáticas, se ha intentado buscar la verdad, en un sentido absolutista y dogmático. Es necesaria y urgente una revisión de la Filosofía de la Matemática, que en el último siglo se ha visto atormentada por crisis de los fundamentos de esta ciencia.

2.6.1. La Filosofía clásica griega.

Para el filósofo griego Platón (hacia el año 429 a.C.), estudioso de Pitágoras y discípulo de Sócrates, además de las cosas físicas, existe el mundo de las ideas. Aprovechando sus dotes de Geómetra – pues se cuenta que en la entrada a La Academia había un letrero que decía “no entre aquí quien no sabe geometría” – para él, un triángulo se definía en el mundo de las ideas (de carácter atemporal) y por tanto difería del triángulo trazado sobre un papel, pues éste último estaba a diferencia del primero, contaminado de imperfección. Esta epistemología de las “cosas”, denominada idealismo, lleva a concebir la matemática como una manera de pensar sobre el objeto que está fuera, que ya existe y por tanto que se debe descubrir. Tanto así que considera que los matemáticos nada pueden inventar, pues todo es preexistente. La repercusión a la enseñanza de las matemáticas en este aspecto está en la consideración a-histórica de los objetos de conocimiento. Se encuentra aquí, podríamos decir, la primera piedra angular del sentido de infalibilidad de las matemáticas, puesto que sus propiedades pueden ser demostradas por cadenas lógicas de argumentaciones teóricas.

De la época griega, sin embargo, el filósofo más representativo por sus obras es Aristóteles (hacia el año 384 a.C.), discípulo de Platón, introdujo un método de razonamiento deductivo a través de sentencias organizadas en premisas y conclusiones que son denominados como silogismos, aportando así al desarrollo de la lógica, unidad mínima de la Filosofía de la Matemática.

En tanto en Euclides (hacia el 300 a.C.), en sus Elementos, se estableció una reestructuración de los conocimientos matemáticos en un modelo axiomático. Es precisamente ésta obra la que da el punto de inicio de un sistema formal, organizado en definiciones, axiomas, teoremas, corolarios y nociones comunes, en que éstas últimas corresponden a conceptos no definibles, por la imposibilidad de encontrar definiciones

no circulares. Volveremos más adelante sobre este punto, esencial desde la perspectiva de la falibilidad de los sistemas axiomáticos a los que ya haremos referencia.

En Euclides, la noción de proposición en el sistema formal es análoga a la de enunciado en la teoría intuitiva. La derivación es análoga a la demostración. La noción de proposición derivable es análogo a la de enunciado cierto, y la de proposición refutable, análoga a la de enunciado falso (Ruiz, 1985).

2.6.2. Las corrientes Racionalistas, Formalistas y Logicistas.

En este recorrido sintético, no se dan avances importantes hasta la llegada del siglo XVI, época en que se había instalado el movimiento del Renacimiento en Europa Occidental. Tal movimiento provocó la estructuración no sólo de las artes, sino también de la política, la religión, la literatura y las ciencias. Aparecen aquí los nombres de Descartes en Francia (1596 – 1650) y Leibniz en Alemania (1646 – 1716). Ambos representantes de la corriente epistemológica conocida como Racionalismo, iniciada por el primero y que nace en oposición al empirismo. De este modo los racionalistas admiten como conocimiento adquirido aquel que puede fundamentarse por la razón, en lugar de la experiencia y la percepción. Para descartes, la verdad universal era alcanzable sólo mediante el uso de la razón. Se recupera así el planteamiento idealista de Platón.

La geometría y las matemáticas en general serían el modelo al que según el racionalismo se debieran poder explicar todas las verdades, por lo que las ciencias comienzan a intentar parecerse lo más posible a las matemáticas, pues éstas son infalibles. No existen en esta corriente, las ideas que puedan crearse por los sentidos. Si hay algunas inexplicables mediante la razón, postulan que deben considerarse ideas innatas.

Ruiz (op cit), menciona cuatro características del Racionalismo:

- Sólo puede admitirse como verdadero lo que es evidente y está demostrado.
- Es indispensable el dividir lo complejo en cuantas partes sea posible.
- Proceder de lo simple a lo complejo, de lo más evidente a lo menos evidente.
- Investigar el objeto de estudio en todos sus detalles y pormenores.

Como se podrá notar, el Racionalismo conlleva a una matemática depurada, perfecta, dogmática, dueña de la verdad universal y caracterizada por una creencia de avances lineales en la adquisición de conocimientos, acorde a una cibernética de primera generación como diríamos hoy en día.

Durante fines del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX, se comenzó a desarrollar fuertemente la Teoría de Conjuntos y con ello, la lógica matemática. Dos campos en los que se apoyaba la idea de rigORIZAR el conocimiento matemático al estilo formal de *Los Elementos*, pero ahora con mayor precisión, pues ya en el siglo XVIII con la aparición de las geometrías no euclidianas se advierten ciertos problemas en la estructura de la geometría de Euclides. Se inicia el Programa del Formalismo Matemático con Peano (matemático italiano, 1858 - 1932) quien en su libro “*Arithmetices Principia Nova Méthodo Exposita*”, presenta rigurosamente la axiomatización de los números naturales, utilizando un lenguaje simbólico y notación lógica. Algunos autores indican a Peano como fundador de la lógica matemática, luego del alemán G. Frege, quien introdujo el uso de cuantificadores universales y existenciales.

Aparece una creciente lista de matemáticos relacionados con el campo de la lógica matemática tales como G. Boole y A. de Morgan, quienes introdujeron sistemas matemático – algebraicos para trabajar las operaciones lógicas.

D. Hilbert (matemático Alemán, 1862 – 1943), fundador de la denominada “Escuela Formal”, reformuló completamente la geometría de Euclides en un sistema axiomático mucho más riguroso que el anterior basándose en la teoría de conjuntos y la lógica matemática, el que publicó en 1899. Este trabajo trajo consecuencias importantísimas para el desarrollo de las matemáticas y también para la manera de concebirlas.

Con lo anterior, Hilbert se propuso llegar a implementar la axiomatización de toda la matemática, de modo que así como lo hizo con la geometría euclidea cualquier proposición pudiera demostrarse en base a un sistema formal. La necesidad de llegar a ello, estaba echada por la reciente aparición de paradojas que hicieron entrever ciertas inconsistencias en los llamados fundamentos de las matemáticas. En particular B. Russell uno de los más importantes filósofos y matemáticos del siglo XX, introdujo con su paradoja del barbero, una gran amenaza a la base de la clásica teoría de conjuntos. La paradoja era la siguiente:

“El Barbero del pueblo afeita a todas las personas del pueblo que no se afeitan a sí mismas”. ¿Quién afeita entonces al Barbero?.

De este modo en el intento de salvar los fundamentos de las matemáticas de las paradojas, es decir, de resolver la crisis que originaban, la matemática comienza a fundamentarse en una teoría de conjuntos y una lógica matemática axiomatizadora. Según Font (2003), aparecen tres respuestas a la crisis:

“...La respuesta de Brouwer que rechaza la lógica clásica y el infinito actual y postula una nueva lógica y una nueva matemática dando lugar al intuicionismo. La respuesta de los Principia de Russel - Whitehead que formula la teoría ramificada de los tipos que elimina las contradicciones generadas por las paradojas pero al alto precio de notables complicaciones técnicas y la respuesta de Zermelo consistente en axiomatizar la teoría de conjuntos con axiomas ad-hoc que impidan la aparición de las contradicciones conocidas...”

2.6.3. Hacia la obsolescencia del Racionalismo radical, del Logicismo y del Formalismo.

Es en 1931 cuando el lógico y matemático austro – húngaro Kurt Gödel, termina con la ilusión del programa de Hilbert, demostrando fehacientemente en su artículo “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme” (Sobre las proposiciones formalmente irresolubles de los Principia Mathematica y los sistemas relacionados), que “No es posible hallar un sistema formal matemático con un número finito de axiomas del que pueda desarrollarse un sistema como la aritmética que sea completo”. Este enunciado llamado “Teorema de Incompletitud” de Gödel, no sólo lo hizo muy reconocido como era de esperar, sino es un hito en la lógica matemática que producirá un quiebre en los fundamentos ahora de la filosofía de las matemáticas que planteaban hasta entonces con gran seguridad el alcance de la verdad universal por métodos matemáticos, en una visión racionalista extrema o radical.

Con este resultado de Gödel, las filosofías del logicismo de Frege y Russel que sostenía el principio de la reducción de la matemática a la lógica y por tanto se podía llegar a la verdad matemática por medio de la verdad lógica, se derrumba pues la verdad matemática resulta ser de mayor amplitud que la verdad lógica, irreductible entonces a la lógica matemática.

Por otra parte, el formalismo de Hilbert también cae, ya que la matemática es inagotable y siempre existirán “verdades” indecidibles:

“El fenómeno de la incompletitud constituye un importante defecto porque entonces el sistema formal no es adecuado para demostrar todas las afirmaciones que podrían serlo correctamente (sin contradicción) dentro del sistema” (Kline, 1972).

Para el positivismo lógico, el teorema de incompletitud, rompe con las ideas fundadoras de esta corriente epistemológica, como lo son: la naturaleza logicista de las

matemáticas y por tanto la reducción de la matemática a la lógica (logicismo), la identificación de la verdad matemática con la demostrabilidad, (ya no es posible) y la existencia matemática con la consistencia lógica, consistencia que ya no es total.

Por sobre todo el Racionalismo impulsado por Descartes y Leibniz, pierden su mayor pilar fundamental: Ha buscado la evidencia de lo infalible, sin embargo, la Matemática es ahora en términos de Lakatos (destacado matemático y filósofo de la ciencia de origen húngaro, 1922 – 1974), falible. El concepto de verdad absoluta se ve cuestionado, lo que demarca un gran giro en la filosofía de las matemáticas.

Díaz (op cit) señala:

“Gödel conduce a romper el esquema del sistema absoluto y cerrado para todo discurso, conduce a romper la continua pretensión del racionalismo de dar cuenta a partir de la razón de toda la realidad. Ningún sistema racional puede comprender la totalidad de lo real...”

A pesar de la emergencia de una nueva filosofía de las matemáticas, el formalismo hilbertiano tiene repercusiones en los positivistas que en los años 60' y 70' llevaron a cabo la Reforma de las Matemáticas Modernas (Ver apartado 2.5).

2.6.4. Hacia una nueva Filosofía de las Matemáticas.

Lakatos, aprovecha el teorema de Gödel en su lucha contra el dogmatismo matemático e introduce la corriente que llamó falibilista o cuasi -empirista, noción que había trabajado su maestro K. Popper, con la diferencia que lo aplicaría a la Matemática. Considera el teorema de incompletitud como un principio de conservación del falibilismo crítico, que lo lleva a identificar dos tipos de teorías o programas de investigación: Las euclídeas y las cuasi - empíricas. Dos ejemplos de programas euclídeos (basados en la axiomática) son el formalismo y el logicismo.

Los programas euclídeos buscan la verdad auto - evidente, consideran las matemáticas como infalibles, se actúa por medio del método deductivo y se aspira a un desarrollo continuo, acumulativo y lineal de las verdades universales. Los Programas cuasi – empíricos, consideran la matemática como conjetural, falible, a partir de las cuales se enuncian pruebas y refutaciones para la aceptación de verdades, en un ámbito de cierta relatividad. Importante es destacar que Lakatos se propuso mostrar que la matemática es conjetural, por lo que tampoco se debe caer en el escepticismo matemático, corriente opuesta al dogmatismo, sino se trata de utilizar la razón sin abandonarla por completo, lo que coincide con la mirada actual de la filosofía de las Ciencias y de las Matemáticas bajo una racionalidad moderada, abierta a la falibilidad, que se encuentra en los espacios de evolución de los conceptos y por tanto en su historia. En su libro “Pruebas y refutaciones” de 1978, dice Font (2003):

“Lakatos presenta el desarrollo de la actividad matemática a partir de un problema y una conjetura. En este libro, Lakatos utiliza la historia para intentar convencer al lector de que las matemáticas informales – las matemáticas en proceso de crecimiento y descubrimiento – lo mismo que las ciencias experimentales, son falibles y no indubitables; también que se desarrollan gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades y en las que siempre cabe la posibilidad de error o de omisión”.

Uno de los principales aportes de Lakatos (1978), fue poner sobre la discusión en la enseñanza de la matemática escolar la necesidad de “Hacer matemáticas” poniendo el énfasis en la resolución de problemas.

Ya llegados a este punto, podemos intentar comprender las ideas de Javier de Lorenzo, historiador y filósofo de la ciencias, español y actual académico del Departamento de Filosofía de la Universidad de Valladolid, sitúa la filosofía de las matemáticas desde su quehacer, retomando los elementos dados por Lakatos en considerar una filosofía que verse no sobre la lógica como tradicionalmente se ha hecho, sino una filosofía desde los modos de hacer en la actividad matemática, la que proporciona la información sobre los accesos al estudio de esta ciencia.

De Lorenzo (1977), enfatiza la idea de “los haceres de la matemática”, dando lugar a la acción, la fragua, el quiebre entre otras de sus características que le son propias, mirando los conceptos, las técnicas, la historia de tales haceres. En su obra “La Matemáticas y el problema de su historia”, expone:

“el conocimiento matemático se produce mediante permanentes saltos y rupturas, a lo largo de muy distintos contextos y ramales siguiendo múltiples ritmos y tiempos, constantes incorporaciones, transvases, osmosis, traducciones y representaciones se producen luego entre los diversos entornos del saber matemático, las nociones ya construidas permiten entonces la fabricación de otras nuevas mediante interrelaciones, deformaciones, transfiguraciones. Surge así, una matemática eminentemente dinámica, no evolucionista, difusionista o cíclica, situada en un tiempo no lineal”.

y advierte:

“...quien pretenda reducir a un lenguaje único, con suposiciones únicas, las distintas parcelas de la práctica matemática, no podrá dar cuenta del total de dicha práctica”.

De este modo, pone de manifiesto el aspecto humano de las matemáticas del que ya hemos venido tratando, pero que ciertamente es una expresión desconocida por los más ortodoxos matemáticos y también por algunos enseñantes tradicionalistas.

Citar a De Lorenzo (quien sigue algunas líneas de Pascal, Kant y Poincaré) toma sentido por la crítica que hace a la clásica filosofía analítica de las matemáticas, en que se encuentra un Russel hablando de Topología Algebraica, un Wittgenstein mencionando espacios funcionales o un Quine estudiando geometría de variable compleja, es decir, una filosofía que ignora la verdadera matemática moderna, puesto que no se trata de mirar el comportamiento de los contenidos, sino de cómo se ha llegado a ellos, es decir, cuáles han sido las vías de acceso de tales construcciones, de lo que realmente debería encargarse una filosofía “moderna” de las matemáticas, aunque en nuestra opinión, el apellidarlas de “modernas”, nos ocasione una cierta y negativa remembranza.

A pesar de los cambios de un primer a un segundo Wittgenstein que nos lega la literatura, De Lorenzo no muestra estar de acuerdo con sus propuestas, puesto que para el último, las características del “hacer matemático” son dos:

1. Su incesante construcción y transformación (versus una concepción eterna y estática de la matemática).
2. Su entrelazamiento intrínseco con el mundo, que lo modula y al cual el hacer matemático a su vez moldea (versus una concepción lingüística y gramatical de la matemática como la que propone Wittgenstein). (Zalamea, 2002)

Sin embargo recupera el valor arqueológico para estudiar la pragmática interna del sistema Wittgensteiniano.

Putnam y Benacerraf publican en 1983, “*Phylosophy of Mathematics*”, una compilación muy influyente en los filósofos de la matemática, en la que utiliza la palabra matemáticas cuando se trabaja netamente sobre la filosofía de la lógica y por tanto, dando la mirada analítica que reduce la matemática a la lógica, que ya como hemos visto, a perdurado a pesar de que poco más de medio siglo antes Gödel probara el fin del logicismo y con esto según De Lorenzo, la necesidad de trabajar en una filosofía de la real praxis matemática, como tarea pendiente y por aquel tiempo marginal.

Cabe señalar un dato importante que proporciona Zalamea (2002) y que se refieren a la divulgación de la Filosofía de las Matemáticas (o en realidad de la lógica). Destacamos lo que él llama una tendencia y una singularidad: La tendencia a una percepción unitaria de la lógica, en lugar de una visión múltiple de “las lógicas” que se venían desarrollando desde mediados del siglo XX, y por otra parte la singularidad de la gran cantidad de referencias a Russel y Quine, lógicos analítico – ortodoxos en desproporción manifiesta al número de referencias a Gödel y Tarski, que trabajaron en la línea de De Lorenzo y de las lógicas múltiples.

Llegamos de este modo, luego de esta breve pero necesaria revisión de la Filosofía de la Matemática, a través de su historia, a comprender el punto teórico del que hemos venido adhiriendo desde el inicio de este capítulo: La importancia de apoyarse en un marco constructivista en una visión naturalizada y pragmática de la ciencia, que lleva no sólo a entender de este modo la matemática como actividad profundamente y esencialmente humana sino también su filosofía desde su praxis irreductible a la lógica y en consideración de una racionalidad moderada.

2.6.5. La Visión Naturalizada y Pragmática de la Ciencia.

Así como hay una pujante tendencia a una nueva filosofía de las matemáticas que se ocupe realmente de los problemas de su praxis y no de su reducción a la lógica, también en forma más general en los últimos años se ha venido dando con fuerza la corriente denominada “visión naturalista – pragmática de la ciencia”, entre cuyos representantes se encuentra Ronald Giere con las que pueden considerarse como las obras detonantes de esta corriente: “La Explicación de la Ciencia” de 1992. Dos elementos destacados del naturalismo son:

1. La idea de que la evolución de la ciencia es Darwiniana y
2. El uso de modelos cognitivos en filosofía de la ciencia.

Para Giere (1992), naturalizar la ciencia corresponde al intento de explicar las decisiones de los científicos suponiendo que éstos han hecho evolucionar sus capacidades cognitivas propias, dando un lugar esencial al cognitivismo. Señala la importancia de considerar a los científicos no desde la racionalidad pura y cartesiana (con la que no se podría aspirar al naturalismo) y por tanto de observar los mismos cambios que se van produciendo en los propios científicos en su tarea de hacer ciencia.

Podemos interpretar de esta corriente filosófica - que nos identifica – la relación del sujeto con la verdad, la que ahora ya sabemos, no es universal, sino considerarla como existente y ciertamente verdadera pero referida a una teoría. Por tanto, no habría teorías buenas o malas, verdaderas o falsas. En Matemática por ejemplo, un naturalista no podría pensar que la geometría de Euclides no sirve o está obsoleta, como sí lo manifestaron los más ortodoxos representantes de las matemáticas modernas y la escuela estructuralista, netamente racionalistas duros y logicistas, sino la consideramos como una teoría más dentro de “las geometrías” tan válida o cierta como la proyectiva, la riemanniana o la fractal. Del mismo modo que ya no podemos hacer referencia a frases típicas de antaño como “no hay nada más cierto que $2+2 = 4$ ”. En la actualidad, esta afirmación no siempre es verdadera, pero el saber cultural insiste en ello, y entonces es posible que muchos profesores no estén culturalmente preparados y dispuestos a mirar de otro modo, más abierto a la ciencia y en particular a las matemáticas, desde la naturalización propuesta pero también desde una mirada pragmática, en el sentido de Giere, transformadora.

Precisamente, *ésta es la visión desde la cual se toma posición epistemológica en esta tesis doctoral*. Concebir las matemáticas como construcción humana, donde las primeras ideas intuitivas en el aprendizaje se formulan en términos de protoconceptos, gatillados por una necesidad proveniente sea del mundo real o del propio mundo matemático, generando los paraconceptos, llegando finalmente a un acuerdo o convención de la comunidad científica que legitima el saber. Así se llega en aceptar un edificio matemático en continua construcción, consolidando a nivel puramente matemático aquellos objetos que merecen un lugar en tal edificio. La construcción de éste la entendemos como dinámica y evolutiva en el tiempo. El texto del Saber nunca está escrito en totalidad. Tal como marcara el desarrollo de las matemáticas, el “Principio de extensión de las leyes formales” formulado por el alemán Herman Henkel, permite comprender cómo toda estructura matemática nueva debe comportarse preservando lo que ya se tiene, en que en el peor de los casos, la modificación de parte

de esa estructura, que a nivel erudito se conforma de sistemas axiomáticos, sino se puede mantener dentro del sistema, crea otros nuevos, tal como ocurriera con las geometrías no euclidianas.

Se espera que no se piense en el edificio matemático como un edificio encriptalizado, puesto que siempre está en permanente construcción, dejando a nivel de acuerdos (definiciones y axiomas) su nivel más alto de erudición, la que es necesaria y verdadera dentro de una teoría y no en un absolutismo sordo.

El modelo cognitivo de la ciencia se concentra en como los científicos trabajan, y comunican y resalta el aspecto semántico de las teorías: Su meta no es alcanzar la verdad, sino darle un sentido al mundo, de acuerdo al objetivo final que es la transformación activa de la naturaleza.

En su trabajo Giere enfatiza la importancia de los modelos teóricos en la ciencia, estos modelos son considerados un tipo de representaciones mentales de los mapas internos del mundo exterior. Tales modelos teóricos pueden ser de naturaleza muy diversa: Entidades lingüísticas, modelos materiales, mapas, analogías, casi cualquier sistema simbólico que puede ser usado como modelo teórico siempre y cuando pueda conectarse a la realidad por medio de la hipótesis teórica.

La relación entre los modelos teóricos y la realidad es de similitud, no de correspondencia o de conveniencia como se declaró en las epistemologías clásicas. También es por medio de la similitud que las teorías científicas se presentan en los libros; como un grupo de modelos relacionados a algunos factores y algunos instrumentos identificables, los cuales dan significado a la teoría. Las relaciones entre los modelos y los hechos se desarrollan a través de hipótesis teóricas las cuales pueden ser verdaderas o falsas puesto que tienen un contenido empírico. Una teoría científica es

considerada como una familia de modelos, junto a un grupo de hipótesis que establecen la similitud de estos modelos respecto al mundo real. De esta manera, la teoría necesariamente contiene sus aplicaciones y puede ser entendida en parte como una interpretación del mundo.

El modelo cognitivo de la ciencia se concentra en como los científicos hacen ciencia, para llegar a una meta. Dentro de esta estructura, hablamos sobre una racionalidad hipotética (Giere, 1992). La cuestión es ahora como caracterizar cuales estrategias son usadas por los científicos cuando van tras metas científicas y como deciden qué modelos - seleccionados entre lo disponible – son los mas apropiados para aquellas metas. Con esto, la epistemología es naturalizada, en el sentido de que no se identifica mas a priori con una forma especifica de razonamiento. El intento cognitivo para el estudio de la ciencia provee una base para relaciones fructíferas entre la historia y la filosofía de la ciencia, la filosofía cognitiva, y la educación de la ciencia (Quintanilla, 2005).

Los filósofos naturalistas como hemos dicho, se han basado en la idea propuesta por S. Toulmin en cuanto a considerar el desarrollo del conocimiento científico como un proceso de evolución Darwiniana. Para Toulmin los hombres demuestran su racionalidad no ordenando sus conceptos y creencias en rígidas estructuras formales, sino por su disposición a responder a situaciones nuevas con espíritu abierto, reconociendo los defectos de sus procedimientos anteriores y superándolos (Chamizo, 2007).

Toulmin introduce los “componentes de la razón”, en que la racionalidad en respuesta a lo abstracto y atemporal se llega mediante diversas puestas en acto de actividades razonables. Volveremos sobre este punto en el apartado 2.9.

2.7. La divulgación del conocimiento matemático: El caso de los libros de texto.

Una de las maneras de divulgar el conocimiento es el material escrito que va quedando en el tiempo como legado. Así ocurrió con “Los Elementos” de Euclides, quién recopiló la información matemática de la época, la organizó en un sistema de definiciones, nociones comunes (que hoy llamamos conceptos primitivos), postulados y teoremas, para su difusión. Se da inicio a este apartado sobre libros de texto, porque Los Elementos de Euclides ha sido la primera obra de divulgación por más de 2000 años.

Tan importante es esta obra, que después de la Biblia ocupa el siguiente lugar, en relación a la obra más difundida en términos de mayor cantidad de traducciones en el mundo y que orientara por cientos de años la enseñanza de la Matemática.

Este propósito orientador, es el que vemos en los libros de texto escolar, los que en la actualidad se han masificado por la creación de múltiples editoriales que comercializan y compiten con este tipo de productos y que una vez al año se ven enfrentadas en los actuales llamados a licitación en los distintos subsectores de aprendizaje, por el Ministerio de Educación.

Según Villella (2001):

“los docentes suelen sustentar gran parte de sus prácticas en los libros escolares de Matemática que recomiendan usar a sus alumnos y que, algunas veces, ellos mismo usan, convirtiéndose así el texto en el vehículo que legitima los contenidos prescriptos y en una de las principales fuentes de actividades y tareas.

Vargas (2003), señala:

“el libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el instrumento mayoritariamente usado por los profesores. Especialmente el TIMSS, (tercer estudio internacional de Ciencias y

Matemáticas) muestra que el texto es utilizado para decidir qué temas enseñar y cómo enseñarlos así como para determinar cuáles ejercicios y problemas solucionar. Esta posición privilegiada del texto, condice indudablemente al reconocimiento de la necesidad de convertirlo en objeto de estudio didáctico, y, en consecuencia, de aprendizaje didáctico”.

En nuestro país, la importancia del libro de texto adaptando la idea anterior, está para entre otros usos, en las directrices que ofrece en relación a la preparación de las pruebas SIMCE y PSU, como una extensión o puesta en marcha de las actividades genéricas, contenidos mínimos y aprendizajes esperados que aparecen redactados en los Programas Ministeriales.

Desde la caracterización en 5 actos o fases que hace Henry (1995) (Miembro del IREM de Besançon), acerca de la Transposición Didáctica, establece que luego de los Matemáticos que tienen a su cargo el inicio del proceso al ser los gestores del conocimiento a nivel científico o erudito, participa en un segundo acto, la decisión política de seleccionar los contenidos que se transformarán en saber a enseñar, es decir, la elaboración de programas a cargo de expertos de los respectivos Ministerios de Educación, los que son interpretados y difundidos por medio de los textos escolares, los que participan de un tercer acto de transposición. He aquí su importancia. Los autores de libros de texto, declaman su propia epistemología en acomodo a los requerimientos ministeriales, y por tanto, son una rica fuente de análisis de unidades didácticas que permiten la categorización a priori de las prácticas de los docentes y alumno (Font, 2004).

En los próximos puntos se hará un sucinto recorrido de la historia del libro, dada su importancia para esta investigación, para luego converger en los libros de texto y en su actual situación en Chile.

2.7.1 El libro en el desarrollo de la humanidad.

Desde que se tiene registro hablado o escrito en la historia del hombre el libro ha sido importante en su desarrollo como raza y como individuo. De hecho, al menos la mitad de la población mundial basa sus creencias religiosas y su conducta moral en un libro, *La Biblia*, palabra que viene del griego y que precisamente significa “libro”. Más aún, grandes hitos en el desarrollo del conocimiento, la filosofía y la política de grandes grupos de personas están basados en libros que significaron una verdadera revolución en el pensamiento de sociedades enteras. Es así que este dispositivo, entendido como tal, ha marcado el camino del hombre en su continuo avance hacia el futuro y en su desarrollo y progreso material, social y espiritual.

Desde antiguo se acumularon libros en edificios que pasaron a llamarse bibliotecas y constituían centros de contención y divulgación del saber que se tenía hasta ese entonces. Una de las más conocidas en la antigüedad fue la biblioteca de Alejandría, según Heródoto, que terminó trágicamente en un incendio que destruyó miles de documentos. Fue a fines de la edad media cuando gracias al ingenio del Alemán Johannes Gutemberg la historia del libro dio un impresionante avance. Este fue la invención de la imprenta.

2.7.2 Evolución, desarrollo e importancia de los textos de estudio

Desde sus orígenes se usaron libros para enseñar, pero dado su alto costo, en la mayoría de las veces, sólo poseía un ejemplar quien enseñaba a otros. Con la masificación del libro, en particular desde comienzos del siglo XX, además de los profesores, sus alumnos llegaron a poseer ejemplares para su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Usar un libro de texto para aprender un determinado contenido, sea este de cualquier índole o procedencia, implica tener un supuesto epistemológico de cómo aprendemos. El proceso mismo de aprendizaje y los procesos subyacentes a él continúan siendo un misterio para la ciencia actual. Pero fácticamente hablando, nadie pone en duda en la actualidad, que un libro de texto es una poderosa ayuda y una poderosa herramienta para el proceso de aprendizaje. Estos datos son proporcionados por las actas del Primer Seminario internacional de textos escolares del año 2008.

A finales del siglo XX se instalaron las teorías de aprendizaje basadas en los modelos de procesamiento de la información copiados del software y hardware de los computadores y sus desarrollos teóricos, y los libros de texto sufrieron cambios para adecuarse a esta nueva forma de ver el proceso de aprendizaje. Es así como era importante en esta época que el estudiante tuviera una visión global de los contenidos a aprender para recibir un feedback adecuado a medida que avanzara en la adquisición del nuevo conocimiento. Se supone que el conocimiento va desde el emisor (libro) al receptor (estudiante). Nótese aquí la importancia y responsabilidad del libro de texto en el proceso de transposición didáctica.

En los tiempos actuales el paradigma oficial sobre la forma de cómo se aprende es el constructivismo, donde lo importante es el *hacer*, pero un *hacer* en forma activa y eficiente. Los textos de estudio todavía no se han amoldado completamente a esta teoría, pero se trabaja activamente en ese proceso. La idea central de esta teoría es que el alumno construye su propio conocimiento a través de la praxis activa con el medio que lo rodea.

Una interesante pregunta es si son importantes los textos de estudio. El conocimiento se transmite principalmente a través de las páginas de un libro y así pasa de una generación a otra, es más, queda guardado en estado latente hasta que alguien lo tome y lea las páginas de ese libro, de forma que el conocimiento vuelve a revivir. Sigue

siendo el medio más socorrido de transmitir información, entendiendo por información cadenas de símbolos portadores de significado explícito e implícito.

Hay un milenario aforismo chino atribuido a Lao-Tse que dice : “la escritura más sutil es infinitamente más poderosa que la memoria más desarrollada”. Esto es verdad, en los libros y textos esta la memoria de los pueblos y refleja su postura idiosincrática frente a la realidad del cotidiano de la época que les toca vivir. Una revista del kiosco de la esquina es un texto, un periódico también lo es. Texto es cualquier medio impreso que porta un mensaje para otras personas. Los seres humanos no sólo aprenden en los textos de estudio oficiales, o libros de texto que tienen tal misión, sino también de cualquier medio impreso factible de ser leído por los ojos y procesado por el cerebro. Es el currículo nulo, que informa y enseña de su propia manera a la gran mayoría de la población que vive en un territorio determinado.

2.7.3 De la Calidad de un Libro de texto

Del Primer Seminario Internacional de Textos Escolares, que tuvo lugar en Chile entre los días 10, 11 y 12 de noviembre de 2008, se propusieron algunos criterios para la producción de textos escolares y para su evaluación. Casi todos los países tienen listas de verificación para ayudar en el proceso de certificar la calidad de los textos escolares que se producen. La siguiente lista incluye las exigencias pedagógicas y profesionales que se plantean al material producido por las editoriales. Las listas de verificación son utilizadas por autores y editores, pero pueden ser usadas por cualquiera que necesite evaluar un texto escolar. En general se usa un listado de verificación que puede variar de un país a otro, pero los criterios globales son similares en gran parte del planeta.

- Todos los materiales deben cumplir en todo momento con la legislación y se debe adecuar al currículo vigente en el país.

- Casi todos los países tienen un currículo definido de carácter universal que se supone debe proporcionar orientaciones para todo lo que ocurra en donde se imparte la educación. Los productores de materiales educativos deben asegurarse de cumplir con las pautas que impone dicho currículo.
- Los objetivos que hay detrás de cada publicación deben plantearse claramente en la introducción o en la guía para el profesor, así como también información sobre cual es el grupo objetivo al que pretende orientarse el material educativo.
- Se debe saber por qué se ha publicado el libro, qué debe enseñar, mediante qué métodos y a qué grupo va dirigido.
- Un buen texto escolar debería proporcionar además información acerca de la estructura general del material educativo, al igual que de otros materiales relacionados con esa publicación. Cada unidad de enseñanza debe ser la continuación natural de la anterior y se debe concatenar armónicamente con la posterior unidad de enseñanza.
- Hay que asegurarse de que existe una estructura natural en la manera como se organiza la educación del estudiante. Lo que aprendieron hoy se debe basar en lo que aprendieron ayer y al diseñar un texto escolar se debe estar consciente de qué es lo que viene después en cuanto al contenido educativo para que pueda entender lo más complejo que viene en forma posterior. Un texto escolar no puede ilustrar islas de conocimientos, sino debe ser una parte de un conjunto coherente, estructurado y bien articulado de textos que producen la transposición didáctica del conocimiento que ordena entregar el currículo de cada país.
- La estructura del material educativo debe estar organizado dejando claro cuales son las teorías subyacentes de aprendizaje en las que dicho material esta basado en su elaboración, diseño y presentación. Existen muchas teorías e ideas que pretenden explicar como se lleva a cabo el proceso de aprendizaje en los estudiantes. El profesor que elije un texto debe poder ver a primera vista en que teoría o ideas se basa dicho texto.

- La presentación general, el uso del lenguaje y la exposición de los conceptos usados en el texto deben estar de acuerdo con la madurez, edad y profundidad del contenido tratado.
- El material educativo debe proporcionar un conocimiento claro y preciso de la materia a tratar, basado en las investigaciones más recientes dentro de la materia que se está tratando. Esto es, estar al día con los cambios e investigaciones que se llevan a cabo día a día en el campo del conocimiento humano. Esto significa en la práctica una continua renovación del material que a veces resulta muy engorroso.
- Es importante tener en cuenta a los padres de los niños a la hora de preparar el material del texto, pensando en que ellos, serán participes en la educación del niño. El material debe incluir actividades y tareas para realizar con mayores.
- Debe evitarse la publicidad comercial, ya sea directa o indirecta.
- El material del texto debe promover la protección del medio ambiente, el uso sustentable de los recursos naturales de la tierra, el respeto por todos los seres vivos. También debe promover el respeto a los derechos humanos, la igualdad de todos los seres humanos sin importar su género, etnia, religión y nacionalidad. También debe tener una postura clara contra todo tipo de violencia y todo tipo de opresión.

2.7.4 De la producción, distribución y costo del material educativo

En estos elementos cada país sigue un criterio propio de acuerdo a su infraestructura económica, sus políticas sociales, sus condiciones geográficas y sobre todo su postura idiosincrática frente a la educación de las personas que habitan el territorio. En el caso de Chile, se crea el Programa de Textos Escolares de Educación Básica y Media por iniciativa del Ministerio de Educación, donde el servicio responsable de este programa es la Unidad de Currículo y Evaluación que adquiere y distribuye

libros de texto a todos los alumnos de la educación subvencionada del país y a sus respectivos profesores.

El fin de este programa es contribuir a mejorar la calidad de los aprendizajes y la equidad en su distribución social de la educación. El programa pretende aumentar y potenciar las oportunidades de aprendizaje de los alumnos y los docentes de los establecimientos subvencionados de todo el país en las áreas prioritarias del marco curricular oficial a través de la utilización de los textos escolares.

Las áreas prioritarias del marco curricular son: Lenguaje y Comunicación, Matemática, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Inglés, Física, Biología, Historia y Geografía. A su vez, el uso esperado del material educativo tiene dos dimensiones: orientar el trabajo de la asignatura donde lo primordial es el rol del docente y ser considerado como recurso metodológico donde lo primordial es el rol del estudiante.

La población objetivo son todos los estudiantes de unidades educativas subvencionadas desde primer año de enseñanza básica hasta el cuarto año de enseñanza media de todo el país y los profesores que enseñan a dichos estudiantes. Según los datos manejados, la población de alumnos alcanzaba a cerca de los 3 millones y los profesores a cerca de 100 mil. La población objetivo refleja la cantidad de textos que son entregados cada año de acuerdo a cada nivel, grado y subsector de aprendizaje correspondiente.

El costo total del programa es de unos 12 millones de dólares al año, en promedio cada niño recibe 4 libros.

El programa en su modalidad actual surgió en 1990, aunque el estado de Chile viene distribuyendo libros desde el año 1940. Hoy se puede visitar su sitio web: www.textosescolares.cl:

Cabe destacar que el único componente de este programa es la adquisición y distribución de textos escolares de calidad y velar por las preferencias de los establecimientos educacionales y de acuerdo a las exigencias técnico - pedagógicas.

2.7.5 De la adquisición de libros de texto escolar

Los textos escolares se adquieren en el mercado de libre competencia a diferentes editoriales previa *licitación*. En las propuestas de licitación se enumeran las características esperadas y requeridas de cada texto. Luego cada editorial que se presenta a concurso, expone los modelos correspondientes que son evaluados por un grupo de especialistas. La evaluación de cada libro de texto se hace por un grupo de profesionales multidisciplinario ad-hoc compuesto de entre 5 a 8 personas. Cada equipo de profesionales que evalúa un libro de texto lo hace primero en forma individual y luego grupal, siguiendo una pauta establecida, lo que permite que el proceso sea homogéneo y coherente.

Las seis características esperadas de un “buen” libro de texto según el Informe final de Evaluación del Ministerio de Hacienda al Programa de Textos Escolares de Educación Básica y Media del año 2003, recuperable en la dirección web:

http://portal.textos Escolares.cl/website/index2.php?id_portal=1&id_seccion=5&id_contenido=37, son:

1. Rigor académico.
2. Priorizar la profundidad sobre la amplitud temática.
3. Lenguaje claro y preciso.
4. Debe ser positivo e integrador.
- 5.- Tener atractivo físico y visual.
- 6.- Tener una estructura motivadora.

La calidad del texto se asocia a una adecuada “bajada” y cobertura del currículo oficial de contenidos mínimos y objetivos fundamentales de los programas de estudio del gobierno central. Sin embargo, es importante mencionar que el libro de texto como agente participante de la transposición didáctica, debe procurar la vigilancia epistemológica de los contenidos, lo que en el informe no aparece lo suficientemente especificado, destacando con mayor énfasis lo estructural y dejando la tarea a los evaluadores contratados por el Programa para determinar lo que en el punto 1 anterior denominan rigurosidad académica. Esto deja entrever la gran responsabilidad que estos sujetos tienen y el tipo de conocimientos (en especial para los de matemáticas) sólidos en la disciplina pero también de conocimientos en Didáctica (en su sentido actual) y en la epistemología de los objetos matemáticos que en son tratados en los libros de texto que se evalúan. Algunas veces se tiende a pensar por desconocimiento, que los mejores evaluadores de los libros de texto por su rigurosidad académica son los matemáticos profesionales, pero carecen de los conocimientos de didáctica específica y por tanto del concepto de transposición didáctica. Por otra parte, los docentes de aula, que en más de alguna oportunidad se les pidió su colaboración en la evaluación, una gran parte de ellos desconoce la epistemología de los objetos que enseñan y mantienen una concepción de

la naturaleza propia de las matemáticas ligada a la visión dogmática que se ha heredado por las escuelas formalistas del pensamiento matemático. El trabajo en conjunto sin duda dará mejores aproximaciones a un buen trabajo evaluativo del texto escolar, pero la componente de la Didáctica específica ha sido un ausente no contemplado en la mayoría de los casos, que como hemos señalado, se debe al desconocimiento que se basa en la escasa formación en el área de la Didáctica en Chile, lo que se traduce en la urgencia por contar con mayor cantidad de profesionales investigadores, parte de los cuales participen de estas evaluaciones.

Siguiendo con el proceso de licitación de los libros de texto, para cada uno hay varias posibles alternativas que se ofrecen a las diferentes realidades educativas del país y a sus diferentes establecimientos, este proceso se denomina *elegibilidad*, donde cada establecimiento elige un determinado manual de acuerdo a como mejor le parezca considerando sus necesidades particulares y su propia visión del hecho educativo.

En los últimos años se ha hecho necesario el evaluar el uso y aprovechamiento del texto entregado en base a lo esperado. Este seguimiento no está del todo implementado, aunque las cifras indican que un 90% de los docentes usan los textos entregados, ya que entregan contenidos, ejercicios, ejemplos, actividades, problemas y sugerencias de evaluación tanto para ellos como para los alumnos. Además los textos entregados orientan la planificación y relacionan los diferentes componentes del currículo ya que los contenidos cubren un 75% de las unidades a tratar durante el año lectivo. En el caso de Educación Matemática casi el 90% de los profesores usan los textos entregados por el gobierno central, según las referencias entregadas por el Programa de Textos Escolares. Aunque la política de textos se concreta en Chile en el año 2.000 se puede decir que el objetivo planteado 10 años antes, es decir el año 1990, sobre lograr una cobertura del 100% se ha logrado casi en su totalidad.

El programa finaliza cada año con la distribución del material educativo a los establecimientos municipalizados a comienzos del año lectivo. En 1995 la UNESCO planteó que a pesar de los avances tecnológicos, el texto de estudio es el dispositivo más económico para la transferencia de conocimientos y factor clave en el mejoramiento del aprendizaje en todo el planeta. Esta idea es lo que justifica y valida todo el esfuerzo del programa de textos escolares en la república de Chile.

2.8. Epistemología del Álgebra de Radicales y su lugar en el Edificio Matemático.

Buscaremos en la propia construcción del conocimiento matemático, esto es, en su proceso evolutivo, la caracterización del álgebra de radicales, en relación a su ámbito conceptual que engloba en sí: El concepto de raíz, el de radical, el de radicación o álgebra de radicales y cómo se relaciona con otros objetos en que tiene directa participación, como los procesos de racionalización, el Teorema particular de Pitágoras, la quinta operación de la aritmética (extracción de raíz cuadrada), la resolución de ecuaciones (en particular las cuadráticas y las inadecuadamente conocidas como irracionales), y las funciones definidas por radicales.

Conociendo las etapas que conforman su evolución a partir de su origen hasta su actual estatus matemático, llegaremos a formular algunas conjeturas que nos aportarán como antecedente para analizar la transposición que hacen los textos escolares desde el saber erudito, al que pertenece. Tres son las etapas en que presentaremos el proceso evolutivo de los radicales: La etapa que describe su origen y cómo se concibe en un desarrollo aritmético (en un ámbito de números no negativos), una segunda etapa destinada a la incorporación simbólica y su utilización algebraica y una tercera etapa vinculada a su designación en el edificio matemático bajo un ambiente funcional.

2.8.1. Origen de los conceptos de raíz y radical.

Muchos de los conceptos matemáticos aparecen en su historia con anticipación a la adopción del símbolo que lo caracteriza universalmente en la actualidad. De este modo el signo radical es posterior a la idea de la que nace su sentido: “Para indicar la raíz”. El concepto antesala al de radical, es el de raíz, y al de radical cuadrático, corresponde al de raíz cuadrada. Por tanto, en este punto, debe entenderse que al utilizar el término “raíz cuadrada” se está utilizando en un ámbito de números reales no negativos y que entonces coincide con el concepto de radical que se verá más adelante.

De esta etapa, destaca el período de la matemática experimental de los egipcios y fundamentalmente el orden y carácter de ciencia abstracta y sistemática que le dieron los griegos. Es probable que la raíz cuadrada fuera pensada por las antiguas civilizaciones y unido al conocimiento de los cuadrados perfectos $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2\}$ con $n \in \mathbb{N}$, dada la necesidad de encontrar la base de una potencia de exponente 2, conocido su valor, como cuando en términos escolares, tenemos que escribir el número que corresponde en el casillero indicado en la expresión: $\square^2 = 16$.

Como los griegos no concebían números negativos, (y así hasta su aceptación en el siglo XVIII (Cousquer, 1998)), no tenían otra posibilidad que encontrar que ese número cuyo cuadrado es 16, es 4. Ocurre en la escuela Pitagórica, en el siglo V a.C. cuando aparece la noción de raíz cuadrada con el denominado Teorema de Pitágoras (aunque es sabido que culturas anteriores como la babilónica o la egipcia ya conocían este hecho), y específicamente con los tríos pitagóricos, tres números a, b, c que corresponden a las medidas de los catetos y la hipotenusa respectivamente de un triángulo rectángulo, los que satisfacen la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

Los pitagóricos se entretuvieron encontrando tríos de números naturales que cumplieran la condición: “La suma de los cuadrados de dos de ellos, es igual al cuadrado

de un tercero”. El concepto de raíz cuadrada se utiliza aquí para calcular uno de los números cuando se conocen los otros dos. Por ejemplo; 3, 4 y 5 es un trío que cumple la condición, tal como lo sabían empíricamente los egipcios al ocupar una cuerda con 12 nudos separados a igual distancia, para formar una escuadra. Al sumar los cuadrados de 3 y 4, es decir $9+16$ se obtiene 25, que debe ser el cuadrado de otro entero, en este caso 5. Para los números 5 y 12 al sumar sus cuadrados también se obtiene un cuadrado perfecto: 169, que corresponde a 13^2 . Observaron que también se puede extender esta situación a otros números fraccionarios como por ejemplo, buscar qué fracción al cuadrado da $\frac{16}{25}$, localizando a $\frac{4}{5}$. En este ámbito, se da algunas de las primeras nociones sobre el álgebra de radicales, pues para obtener $\frac{4}{5}$, se puede proceder encontrando la raíz cuadrada de 16 y la de 25. Este es entonces un primer esbozo de la propiedad de radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ para el caso puntual de $n=2$. Pero insistimos que sólo un esbozo, pues la matemática desarrollada hasta por lo menos el siglo II d.C. fue netamente retórica⁴.

Así, la raíz cuadrada es empleada como herramienta, es decir, como medio para encontrar la base (diríamos hoy racional) de una potencia de exponente dos. Pero luego, advirtieron que no todas las medidas de segmentos eran conmensurables⁵, originando un hallazgo que les llevaría a una de las primeras crisis en la historia de la Matemática, la hoy denominada crisis de los números racionales. Se trata del descubrimiento o

⁴ Aunque algunos historiadores sitúan el período de las matemáticas retóricas hasta el siglo XIII, hemos preferido fijarlo por lo menos hasta el siglo II d.C. , ya que se conocen algunas obras de Diofanto en las que intervienen algunos pocos signos que por otros puede interpretarse como la llamada era de la matemática sincopada (o de los símbolos no universalmente aceptados).

⁵ Es decir, que al medir un segmento con otro tomado como unidad, no era posible encontrar qué parte era uno del otro considerando sólo números racionales positivos, lo que ocasiona la crisis de la racionalidad numérica y da paso entonces a las magnitudes inconmensurables, relacionadas con medidas donde participan números irracionales, concepto nuevo y que destruyó el sueño pitagórico al pensar que el mundo estaba organizado y dominado por lo que ellos concebían como número: lo que para hoy son nuestros racionales positivos.

invención de los números irracionales, (*alogon* o indecibles para los pitagóricos) del cual el primer encuentro fue con $\sqrt{2}$.

Al respecto, Aristóteles en un texto de sus Primeros Analíticos (14 a 26) escribe acerca de la forma en que los griegos descubrieron estos números:

“se prueba, escribe Aristóteles, la inconmensurabilidad de la diagonal por la razón de que los números impares se volverían iguales a los números pares, si se considera la diagonal como conmensurable, es decir, que tienen entre sí una medida común”

Aquí se da a entender que previo a Euclides, los matemáticos griegos no experimentaban inquietudes acerca de los irracionales, de hecho, Platón en sus diálogos, según Teeteto, señala que se habrían construido segmentos de medidas inconmensurables que correspondían a raíces cuadradas y según escoliastas de Euclides, Eudoxo había elaborado una teoría general de las proporciones que consideran a las magnitudes inconmensurables, en vida de Platón.

En el primer escolio del libro X de los Elementos de Euclides, se atribuye el descubrimiento de los irracionales a los pitagóricos, escuela cuyo pensamiento se centraba en la idea que "los números armonizaban el universo". Comienzan los pitagóricos así a buscar la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 unidad. Aparece entonces, un nuevo número que no tiene ninguna de las características de los conocidos. Tal número, corresponde a la raíz cuadrada de 2. Se trataba de buscar exhaustivamente un número cuyo cuadrado sea 2. Así como éste, fueron apareciendo otros del mismo "tipo" que denominaron "inconmensurables". Se cuenta que el pitagórico que primero había divulgado la irracionalidad de $\sqrt{2}$, Hipasos de Metaponte, habría sido muerto en un naufragio. El motivo de este episodio según J. Piaget et al (1979) en su Tratado de lógica y conocimiento científico se debe a que “todo lo que es irracional y carente de forma debe permanecer oculto y si un alma quiere

penetrar en esa región secreta y dejarla abierta, se verá arrastrada al mar del devenir y se ahogará en el incesante movimiento de sus corrientes”.

En la misma obra, el investigador J. T. Desanti señala que en los Elementos de Euclides, se ilustra el razonamiento atribuido a los pitagóricos, para probar la irracionalidad de $\sqrt{2}$:

“Sea AC la diagonal de un cuadrado. Supongámosla conmensurable con el lado AB . Sea $\frac{a}{b}$ la relación $\frac{AC}{AB}$ y supongamos que la fracción $\frac{a}{b}$ está reducida a su más simple expresión, es decir, los enteros a y b son primos relativos entre sí. Por el teorema de Pitágoras $a^2 = 2b^2$, por lo que a^2 es un número par y entonces a es par. Si a y b son primos relativos entre sí, b debe ser necesariamente impar. Por otra parte, la paridad de a nos lleva a escribir $a = 2c$, es decir, $a^2 = 4c^2 = 2b^2$, de donde $b^2 = 2c^2$, lo cual implica la paridad de b . De este modo, la hipótesis $\frac{a}{b}$ es irreductible da como resultado una contradicción: b debe ser simultáneamente par e impar. Falla desde luego, el principio del tercero excluido”.

¿Cómo abordar este problema que desorganiza la filosofía pitagórica?

En el plano matemático, la resolución de la crisis exigió reconstruir la teoría de las relaciones y proporciones de los pitagóricos. Se debió llegar a una teoría general que incluyera las magnitudes tanto conmensurables como las inconmensurables, la que aparece en el Libro V de los Elementos de Euclides. También en el Libro X, según Boyer, trata la clasificación sistemática de los segmentos inconmensurables de las formas que en simbología actual corresponden a $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

Euclides, construyó su teoría de proporciones, para medidas de segmentos tanto conmensurables como inconmensurables, dando un lugar a los nuevos números irracionales. Para los griegos la quinta operación de la aritmética fue la “extracción de raíz cuadrada”, de modo que ya pasa a convertirse en un objeto de estudio, pues, ahora se debía encontrar algún algoritmo que permitiese calcular la raíz cuadrada de cualquier

número racional y no sólo de aquellos que por simple inspección de una tabla de cuadrados pudieran obtenerse. A lo largo de la historia, han surgido varios métodos de extracción de raíz cuadrada, los que omitiremos, por estar fuera del objetivo de esta tesis.

2.8.2. Empleo del concepto de raíz y el uso del signo radical.

Avanzando en el tiempo, los árabes, alrededor del 850 d. C. utilizan la palabra raíz con otro sentido que se puede encontrar en la obra de Mohamed Ibn Musa Al - Khowarizmi denominada Al - jabr. Este escrito se basa principalmente en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Cuando las resuelven anotan las dos soluciones, siempre que estas fueran positivas, incluso el cero no lo adoptaban como solución. Lo importante de la época de la Hegemonía Árabe, fue la introducción de la acepción de la palabra raíz, como solución de una ecuación. En efecto, Al - Khowarizmi, clasifica las ecuaciones de 1º y segundo grado en 6 tipos en que intervienen las tres cantidades que la conforman: Cuadrados, raíces y números, es decir, x^2 , x y números. Estas 6 formas que resolvía por métodos geométricos son:

1. Cuadrados iguales a raíces, en notación actual, $ax^2 = bx$.
2. Cuadrados iguales a números: $ax^2 = c$.
3. Raíces iguales a números: $bx = c$.
4. Cuadrados y raíces iguales a números: $ax^2 + bx = c$.
5. Cuadrados y números iguales a raíces: $ax^2 + c = bx$.
6. Raíces y números iguales a cuadrados: $bx + c = ax^2$.

A partir de este tratamiento, la palabra raíz, toma el significado de solución de la ecuación, que siglos después se formaliza en la teoría de polinomios, dentro del estudio de las estructuras algebraicas en el siglo XIX.

En tanto, el símbolo que hoy utilizamos con el nombre de operador radical $\sqrt{\quad}$, es introducido en 1525 (Guedj, 1998), por el matemático alemán Christof Rudolff, concibiendo una r minúscula (inicial de la palabra latina *radix* que significa raíz) alargada. Se utiliza sin problemas de ambigüedad, pues el contexto numérico correspondía a números no negativos, pues con toda seguridad al efectuar el cálculo de $\sqrt{25}$ se obtenía 5, concibiendo el signo $\sqrt{\quad}$ (u otro según la localidad geográfica) como aquel que es propio de la extracción de raíz, que como operación aritmética es llamada Radicación.

Antes y durante la masificación de este nuevo símbolo, se utilizaba otras notaciones. Según Rey Pastor (1951), el Matemático francés Nicolás Chuquet (segunda mitad del siglo XV), simbolizaba la raíz cuadrada con una R con exponente 2. En una de las últimas obras de los algebristas italianos del siglo XVI, “El Álgebra” de Rafael Bombelli, se indica la raíz cuadrada con R seguida de q encerrando luego el radicando en un doble ángulo recto que en el texto impreso se convirtió en dos L invertidas. Se comienzan a ver así, algunos atisbos de la relación entre los conceptos de raíz y radical; claramente el primero referido a un número, mientras que el segundo a una notación y a su vez de lo que pronto se caracterizaría además como una función.

Con la aceptación y desarrollo de nuevos números en el siglo XIX (negativos, complejos), y por otra parte del álgebra abstracta con la teoría de grupos, y el estudio de las estructuras algebraicas, de Galois en adelante, el enfrentamiento entre raíz y radical comienza a ser más claro. El desarrollo del álgebra por los griegos y posteriormente por los árabes, aunque de modo geométrico, permite establecer que las ecuaciones de segundo grado, se pueden resolver, mediante la transformación a ecuaciones “puras” del tipo $x^2 = a$. De estas ecuaciones se llega (en notación actual) al empleo de radicales cuadráticos, de modo que $x = \sqrt{a}$ o bien $x = -\sqrt{a}$. Por tanto, en términos eruditos y modernos, las ecuaciones de segundo grado, pueden ser resueltas mediante expresiones que contienen radicales. En la matemática escolar son conocidas las expresiones

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para calcular las raíces de la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Los matemáticos italianos Viete, Cardano, Bombelli, Ferrari, entre otros, desarrollan en los albores del siglo XVI, el estudio de las ecuaciones de tercer grado. A Viete se le atribuyen las expresiones:

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \frac{(1-i\sqrt{3})(-b^2+3ac)}{32^{\frac{2}{3}}a \left(-2b^3+9abc-27a^2d + \sqrt{4(-b^2+3ac)^3 + (-2b^3+9abc-27a^2d)^2} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{(1+i\sqrt{3}) \left(-2b^3+9abc-27a^2d + \sqrt{4(-b^2+3ac)^3 + (-2b^3+9abc-27a^2d)^2} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{(1+i\sqrt{3})(-b^2+3ac)}{32^{\frac{2}{3}}a \left(-2b^3+9abc-27a^2d + \sqrt{4(-b^2+3ac)^3 + (-2b^3+9abc-27a^2d)^2} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{(1-i\sqrt{3}) \left(-2b^3+9abc-27a^2d + \sqrt{4(-b^2+3ac)^3 + (-2b^3+9abc-27a^2d)^2} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}a}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3a} - \frac{2^{\frac{1}{3}}(-b^2+3ac)}{3a \left(-2b^3+9abc-27a^2d + \sqrt{4(-b^2+3ac)^3 + (-2b^3+9abc-27a^2d)^2} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-2b^3+9abc-27a^2d + \sqrt{4(-b^2+3ac)^3 + (-2b^3+9abc-27a^2d)^2} \right)^{\frac{1}{3}}}{32^{\frac{1}{3}}a}$$

que permiten hallar las tres raíces complejas de la ecuación cúbica general: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, donde aparece también el signo radical. De igual modo, se pueden expresar las 4 raíces en términos de radicales cuárticos, para las ecuaciones de grado 4, pero se omiten aquí por problemas de espacio.

Con el teorema Fundamental del álgebra y las nuevas matemáticas del álgebra abstracta, se demostró que las ecuaciones de grado superior a 4 no pueden ser transformadas a ecuaciones puras del tipo $x^n = a$. De esta forma, no es posible encontrar expresiones que dependan de radicales para hallar la solución de una ecuación polinómica con coeficientes en \mathbb{R} . A este proceso de resolver ecuaciones vía expresiones que contienen al signo $\sqrt{\quad}$ se le llamo: “Resolución por radicales”. Nótese que si raíz y radical fuera lo mismo, se podría igualmente decir, que las ecuaciones de grado superior 4 no son solubles por raíces, lo que evidentemente no tiene sentido.

El concepto raíz como decíamos, es formalizado bajo la acepción de solución de una ecuación, la que se encuentra en la teoría de polinomios con coeficientes en un

cuerpo K . Las siguientes definiciones están extraídas del texto: *Álgebra Moderna* de Herstein (1964).

Definición: Si $p(x) \in F[x]$ entonces un elemento a que se encuentra en algún campo de extensión de F se llama raíz de $p(x)$ si $p(a) = 0$.

Definición: El número complejo w es una raíz n -ésima de la unidad, si $w^n = 1$.

De este modo, la primera definición da en su estatus matemático y más general del concepto de raíz, haciendo referencia a un número que anula al polinomio dado. Hallar z conduce al estudio de la teoría de ecuaciones, en el que Klein (1908) aporta en obra “*Matemática elemental desde un punto de vista superior*”, el sentido de analizar en detalle las “ecuaciones puras”, es decir, ecuaciones en la indeterminada z de la forma $z^n - w = 0$ (p.162).

Considerando ahora la segunda definición (particular para las raíces de la unidad en el cuerpo de los números complejos), las raíces cuárticas de $x^4 = 1$ son $1, -1, i, -i$. Por tanto, nótese que no está empleándose el signo radical. Si se prefiere puede reescribirse lo anterior como $\sqrt[4]{1}, -\sqrt[4]{1}, i, -i$, en que se ve que la expresión $\sqrt[4]{1}$ denota al real positivo cuyo cuadrado es 1 y $-\sqrt[4]{1}$ a su opuesto en \mathbb{R} .

En el edificio matemático se encuentra el concepto de Raíz bien especificado, sin ambigüedades. Sin embargo, vale la pena mencionar una evidencia histórica que siendo probablemente fuente de inspiración para otros autores, divulga la ambigüedad que en esta tesis bautizamos como “error del doble signo”. Se trata de la obra de Euler (1770), titulada “*Instrucción completa en Álgebra*”, citado por Gómez (2009), en el que da cuenta del uso ambiguo que hace del signo radical:

150. Da nun aber nach der Anmerkung (122) die Quadraturwurzel jeder Zahl immer einen doppelten Werth hat, nämlich so wohl negativ als auch positiv genommen werden kann, indem z. B. $\sqrt{4}$ so wohl $+2$ als auch -2 ist, und überhaupt für die Quadraturwurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$, als auch $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dies auch bei den unmöglichen Zahlen; und die Quadraturwurzel aus $-a$ ist so wohl $+\sqrt{-a}$, als auch $-\sqrt{-a}$, wobei man die Zeichen $+$ und $-$, welche vor das Zeichen \sqrt gesetzt werden, von dem Zeichen, das hinter dem \sqrt Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

Traducción:

150. (...) la raíz cuadrada de cualquier número tiene siempre dos valores, uno positivo y el otro negativo; esto es que $\sqrt{4}$, por ejemplo, es igualmente 2 y -2, y en general, se puede adoptar tanto $-\sqrt{a}$ como $+\sqrt{a}$ para la raíz cuadrada de a .

Al respecto, el avance de los estudios en el edificio matemático, se han ocupado de eliminar estas ambigüedades. Para esto, muchos autores asignan el nombre “raíz aritmética, raíz principal” a la única raíz positiva que es solución de $z^n = w$ cuando se trabaja en \mathbb{R} y con n par. Así por ejemplo “todo número real tiene dos raíces cuadradas, dos raíces cuárticas, dos raíces sextas, etc. También es válido indicar que de $z^n = w$, siendo $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, se tienen siempre dos raíces reales, la principal $\sqrt[2k]{w}$ y la secundaria $-\sqrt[2k]{w}$.

Otra forma de evitar la ambigüedad, menos conocida pero que nos parece muy innovadora, consiste en diferenciar el concepto de raíz (más amplio) y el de radical (más particular), para lo cual seguimos la propuesta de Martínón et als (1990):

1. Distinción y relación entre los conceptos de raíz y radical (en el contexto algebraico).

a) Definición de Raíz n -ésima ($n \in \mathbb{N}$) real de un número real:

Un número real b es raíz n -ésima del número real a si $b^n = a$.

La existencia y cantidad de raíces reales del número real a , viene dada por los siguientes dos casos que dependen de la paridad de n :

- Si n es par se tienen tres posibilidades:
 - i) Si $a > 0$, entonces a tiene dos raíces n -ésimas opuestas.
 - ii) Si $a = 0$, entonces 0 es la única raíz n -ésima de a .
 - iii) Si $a < 0$, entonces a no tiene raíz real n -ésima.
- Si n es impar, sólo se tiene la única posibilidad siguiente:

a tiene una única raíz real n -ésima.

b) Definición de Radical n -ésimo o de orden n ($n \in \mathbb{N}$) de un número real:

La expresión $\sqrt[n]{a}$, llamado radical n -ésimo de a (y no la raíz n -ésima de a)⁶, se define como la raíz n -ésima positiva de a , para $a \geq 0$. Es decir,

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad \text{con } a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Esta definición permite reescribir las raíces n -ésimas señaladas en a) del siguiente modo:

Sea a un número real y n un número natural, entonces:

- Para n par:
 - i) Si $a \geq 0$, las raíces reales n -ésimas reales de a son $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$.
 - ii) Si $a < 0$, el número a no tiene raíz real n -ésima.
- Para n impar:
 - i) Si $a \geq 0$, el número a tiene una única raíz real n -ésima y se denota $\sqrt[n]{a}$
 - ii) Si $a < 0$, el número a tiene una única raíz real n -ésima y se denota $-\sqrt[n]{-a}$

⁶ Algunos autores llaman raíz aritmética o principal al radical n -ésimo.

Estas definiciones implica la reorganización rigurosa de los teoremas con radicales. No demostraremos estos teoremas aquí, pero si consideramos que es importante observar cómo se cuida el terreno en que se utilizan números negativos, que da el cambio del contexto aritmético al algebraico y que como se verá no es advertido por varios autores de libros de texto.

2. Teoremas:

Teorema 1: Sean m y n dos números naturales.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m} \\ a < 0, \quad n \text{ impar} \begin{cases} m \text{ par} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = -\sqrt[mn]{a^m} \\ m \text{ impar} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m} \end{cases} \end{cases}$$

Teorema 2: $a \in \mathbb{R}, a^n \geq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|$

Teorema 3: $a \in \mathbb{R}, a < 0, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}, a^p > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^p$.

Teorema 4: $a \in \mathbb{R} - \{0\}, a^{pm} \geq 0, m, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt[m]{a^{mp}} = \sqrt[n]{|a|^p}$.

Teorema 5: $a \in \mathbb{R}_0^+, m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Teorema 6: $a, b \in \mathbb{R}, ab \geq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \sqrt[n]{|b|}$

Corolario del teorema 6: $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \frac{a}{b} \geq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$

Para extender el concepto de potencia de exponente entero al racional, las bases deben ser positivas. Esto permite generalizar los teoremas de potencias para exponentes no enteros. De este modo: Siendo a y b reales, r y s racionales, se cumple:

$$1. a^r a^s = a^{r+s}$$

$$2. (a^r)^s = a^{rs}$$

$$3. (ab)^r = a^r b^r$$

Sin embargo, al tratar con el concepto más general de potencia, para exponente real, es necesario desarrollar previamente un par de otros elementos para comprender que el edificio matemático tiene una construcción distinta a la de la matemática escolar. Es irremediable pasar por una breve descripción de las funciones reales de variable real.

2.8.3. Radicales en el ámbito de las funciones.

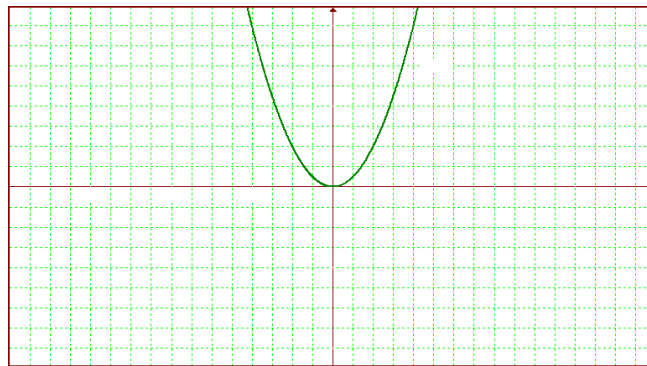
En el siglo XVI el estudio del movimiento apareció como el problema central de la física y como consecuencia, se desarrollaron las matemáticas que estudian la interdependencia de las magnitudes variables, esto es, del concepto de variable y de función. Abstrayendo a formas más generales el estudio de las interdependencias, las expresiones tienen una forma global que las identifican. Tal forma corresponde a la expresión: $y = f(x)$.

Según Azcárate et al (1996), muchos autores concuerdan que el nacimiento del concepto de función se ubica a mediados del siglo XVII, época de Descartes, Fermat, Newton y Leibnitz. Aparece por primera vez el término “función” cuando empieza a desarrollarse el análisis matemático con los conceptos de diferenciación e integración. Cabe destacar que la idea inicial de función era muy restringida, ya que se reducía sólo a las funciones analíticas, las que se pueden expresar mediante una ecuación algebraica y poco después a las desarrollables en series de potencias. En el siglo XVIII, Euler dio la primera definición de función. A partir de ese momento las definiciones se irán perfeccionando en el tiempo, con el propósito de incluir las funciones cada vez más complejas que aparecen, hasta llegar a las definiciones más recientes que incorporan el lenguaje conjuntista.

Con estos nuevos objetos matemáticos llamados funciones, se formaliza el estudio, de varios conocimientos, en especial el de las operaciones. La función Raíz

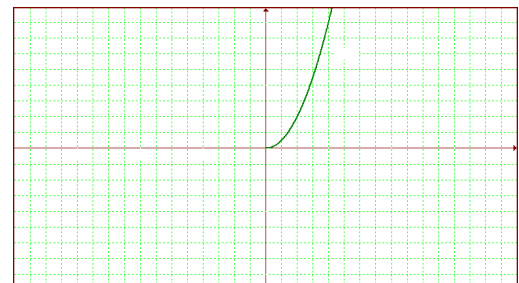
cuadrada (positiva) o más rigurosamente “Radical de orden dos”, como función real de variable real, se construye como la función inversa de la función cuadrática canónica, como veremos a continuación.

Sea f la función que a cada número real le asocia su cuadrado (que es único), el que es por cierto un número no – negativo. Entonces f tiene por dominio el conjunto de los números reales, y su recorrido es el conjunto de los números reales no – negativos. Es decir, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. El registro gráfico de esta función es:



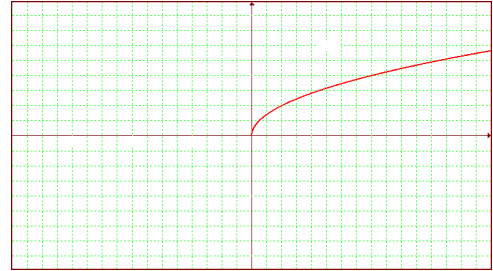
Se puede observar que dos números reales opuestos (inversos aditivos) entre sí tienen la misma imagen. En especial, el hecho que dos números opuestos distintos tengan imágenes iguales permite demostrar algebraicamente que la función no es inyectiva o uno a uno. Fracasa entonces el intento por encontrar una función inversa de la “elevación al cuadrado”. Sin embargo, se puede redefinir la función f , restringiendo su dominio al conjunto de los números reales no – negativos \mathbb{R}_0^+ . Su gráfica bajo este nuevo dominio, se extiende sólo en el primer cuadrante:

Bajo esta redefinición, tenemos la función $f_r: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f_r(x) = x^2$, lo que asegura su biyectividad, y por tanto la existencia de la función inversa. f_r^{-1} ,



para $x \geq 0$ e $y \geq 0$, definida por $f_r^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Esto explica que es un error catalogar como operaciones inversas a las acciones de “elevar al cuadrado” y extraer raíz cuadrada”, puesto que esto es cierto sólo cuando la función canónica cuadrática ha sido restringida.

La función construida de esta manera se denomina Función Radical de orden 2 y corresponde a la inversa de la función cuadrática canónica con dominio y recorrido en los números reales no negativos.



De igual forma se puede continuar la construcción para otros órdenes. Se llega así al siguiente cuadro resumen:

Tabla 2.1. Algunas Funciones potencia y sus inversas

Función g			Función g ⁻¹		
Dom _g	Rec _g	Definición algebraica	Dom _{g⁻¹}	Rec _{g⁻¹}	Definición algebraica
R	R	$g(x) = x^3$	R	R	$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
R ₀ ⁺	R ₀ ⁺	$g_r(x) = x^4$	R ₀ ⁺	R ₀ ⁺	$g_r^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
R	R	$g(x) = x^5$	R	R	$g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$
R ₀ ⁺	R ₀ ⁺	$g_r(x) = x^6$	R ₀ ⁺	R ₀ ⁺	$g_r^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}$
R	R	$g(x) = x^7$	R	R	$g^{-1}(x) = \sqrt[7]{x}$
R ₀ ⁺	R ₀ ⁺	$g_r(x) = x^8$	R ₀ ⁺	R ₀ ⁺	$g_r^{-1}(x) = \sqrt[8]{x}$

La generalización se obtiene en dos clases de funciones; las de tipo $y = x^{2k}$ con $k \in \mathbb{N}$, que se restringen para dar existencia a su inversa del tipo $y = \sqrt[2k]{x}$, y las del otro tipo $y = x^{2k+1}$ con $k \in \mathbb{N}$, que no requieren de restricción alguna en su dominio para hallar su inversa de la forma $y = \sqrt[2k+1]{x}$ para $k \in \mathbb{N}$.

En términos generales desde la perspectiva funcional, se ha analizado la familia de funciones potencia en su versión canónica con parámetro natural n ($y = x^n$), y cuya variable independiente es la base de las potencias para un parámetro fijo n que escogido, caracteriza un miembro de tal familia, por ejemplo para $n = 2$, el estudio se remite a las funciones cuadráticas canónicas.

Sin embargo, el estudio de las funciones radicales sobrepasa a este tipo de parámetros enteros, puesto que al trabajar con elementos de una misma familia, se tendría pro ejemplo sólo propiedades de potencias de igual exponente, por lo que es necesario revisar otras funciones que no se categoricen por sus parámetros como exponentes, sino por sus bases, de manera de poder analizar propiedades de potencias de igual base, lo que permite conectar muy bien con la notación de radical como potencia.

Algunos autores como Spivak (1970), Pisot y Zamansky (1967), Klein (1908), entre otros, con cierta sensibilidad educativa en sus obras, muestran el problema de la organización y secuenciación de los contenidos. Mientras en la enseñanza del álgebra elemental se conoce la función logarítmica después de estudiar la exponencial, en el edificio matemático se tiene exactamente la secuencia contraria. El logaritmo es materia de análisis de donde se construye la exponencial. Este tratamiento que detallaremos es muy necesario, para comprender las restricciones que se imponen en el saber erudito y que no suelen aparecer en la matemática escolar, y más aún, son fuente de errores comunes.

De la expresión $y = a^x$, se puede comenzar indicando que para darle su estatus funcional, el parámetro a debe representar un número positivo. Si fuera negativo, se tendrían imágenes alternadamente positivas y negativas para valores enteros de x e incluiría imágenes no reales para valores fraccionarios de x , lo que no llevaría a una función y mucho menos continua (Klein).

Una vez asumido que en la función $y = a^x$, se considere como una restricción que $a > 0$, otra que aparece es que también $a \neq 1$, pues $y = 1^x$ produciría una función constante, y por tanto sin inversa. La importancia de que tenga inversa reside en la relación que tiene con la función logarítmica, que como insistimos, es su función “madre” en el saber erudito. Por esto, si $x > 0$, entonces $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ y se tiene que $(\ln x)^{-1} = e^x$, para luego presentar el caso más general $y = a^x$ como $y = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$, donde finalmente a es el argumento de una función logarítmica y lo que requiere para su existencia en \mathbb{R} que $a > 0$.

Estamos en condiciones de probar ahora los teoremas de la función exponencial, considerando en esta oportunidad exponentes racionales.

1. Si $a > 0$, entonces

a) $(a^b)^c = a^{bc}$, para todo b y c racional.

b) $a^1 = a$ y $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, para todo x e y racionales.

Demostración a). Sea $a > 0$, b y c racionales cualesquiera.

$$\text{Como } (a^b)^c = e^{c \ln a^b} = e^{c \ln(e^{b \ln a})} = e^{c(b \ln a)} = e^{bc \ln a} = a^{bc}$$

Demostración b). Sea $a > 0$, x e y racionales cualesquiera.

$$a^1 = e^{1 \ln a} = e^{\ln a} = a \text{ y por otra parte,}$$

$$a^{x+y} = e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} \cdot e^{y \ln a} = a^x \cdot a^y$$

De igual forma se prueba que:

$$a^{x-y} = a^x : a^y, \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x, \quad (a:b)^x = a^x : b^x \text{ Para } a > 0, b > 0, x \text{ e } y \text{ racionales.}$$

2.8.4. Ecuaciones que contienen la incógnita bajo el signo radical.

En el saber matemático, una ecuación en R es una función proposicional $p(x)$ con valores en R que toma el valor de verdad (verdadero o falso) cada vez que se reemplaza x por un elemento de R . Dos son las condiciones iniciales que debe satisfacer en una ecuación en R , que contiene al menos una expresión del tipo $\sqrt{\Delta}$, donde Δ es función de x :

i) $\Delta \geq 0$

ii) $\sqrt{\Delta} \geq 0$

El método de resolución, consiste en la eliminación del o los términos que involucran $\sqrt{\quad}$, aplicando las veces necesarias la propiedad:

$$(\forall a \in R)(\forall b \in R): a = b \Rightarrow a^2 = b^2.$$

condición necesaria *pero no suficiente*, esto es, irreversible. La segunda ecuación, de tipo cuadrática contiene a la primera, ya que si S denota al conjunto solución de $a^2 = b^2$ y S' al conjunto solución de $a = b$, se tiene $S' \subset S$. En efecto, si fijamos b y hacemos $x = a$, tenemos que:

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow [a - b = 0] \vee [a + b = 0]$$

$$\Leftrightarrow [a = b] \vee [a = -b]. \text{ Luego, } S = \{-b, b\} \supset S' = \{b\}.$$

2.9. Aplicación del Modelo de Toulmin al Objeto Raíz (cuadrada).

En su obra de 1977, “La Comprensión Humana”, Steven Toulmin proporciona un Modelo para estudiar el *cambio conceptual* y el *cambio científico*, discusión que permite colocarse por sobre un objeto de conocimiento e introducirse en su evolución, rescatando la historia y los vaivenes que le han devenido en el tiempo. Toulmin presenta

su Modelo en forma analógica a la Teoría de la Evolución de Darwin, indicando que la evolución conceptual en una ciencia se produce “sólo si las innovaciones transitorias no mueren automáticamente con sus creadores”.

Uno de los tipos de fenómenos que permite estudiar el Modelo de Toulmin, “comprende los problemas que se presentan cuando consideramos la mutua relación de diferentes conceptos co - existentes en una misma rama de la Ciencia”. El fenómeno que se ajusta muy bien a este tipo de situación, entre otros, es el que presentaré sobre el concepto de Raíz Cuadrada, al cual aplicaremos el Modelo de Toulmin para analizar su evolución.

Estudiando la evolución del concepto Raíz Cuadrada, se encuentran elementos que permitan por un lado explicar la ambigüedad del concepto y por otro resolver este problema por medio de las tres propuestas que ofrece Toulmin: “Refinando la terminología, introduciendo nuevas técnicas de representación y modificando los criterios para identificar casos a los que sean aplicables las técnicas corrientes”⁷.

Se expondrá de manera breve pero concisa, el abordaje de las tres propuestas mencionadas, solución que se basa en los acontecimientos históricos que han marcado y causado la necesidad de recuperar las “buenas definiciones y los correctos tratamientos” que el trabajo de Tesis mencionado pone en evidencia al denunciar la existencia de una ruptura entre el saber científico y el saber a enseñar relativo a la Raíz Cuadrada, situación que puede ser controlada incorporando la epistemología de los objetos matemáticos en la formación inicial y continua de Profesores de Matemática.

⁷ En La Comprensión Humana de S. Toulmin (1977).

2.9.1. La Evolución del Objeto Matemático Raíz Cuadrada a través del Modelo de Toulmin.

El estudio historiográfico que se ha mostrado, permitirá aplicar el Modelo de Toulmin en los cinco tiempos⁸ claves del desarrollo del concepto de Raíz cuadrada que se han definido, siendo en el quinto en el cual se produce el cambio conceptual (de raíz cuadrada a raíz cuadrada principal, aritmética o también radical según la propuesta de Martínón), paralelo que ocasiona dos concepciones en la misma rama del álgebra.

Para realizar el análisis evolutivo de los conceptos de Raíz Cuadrada a través de la historia se utilizó la representación genealógica o longitudinal, la cual corresponde al seguimiento de la Raíz Cuadrada en el tiempo.

Hagamos un recuento histórico. Hasta el siglo VI a.C., con la aparición de Thales de Mileto, los conocimientos matemáticos no tenían un desarrollo científico. Uno de los más fieles historiadores de la matemática, como Proclo (Siglo IV d.C.), muestra en sus recopilaciones que no hay documentos que permitan sostener que el conocimiento de los pueblos egipcios y babilonios, tomara un carácter sistemático y científico, sino más bien de sentido utilitario y práctico. Con Thales, el primero de los 7 sabios griegos, se conoce la argumentación de algunos de los teoremas que conocemos. Nuestro objeto, la Raíz Cuadrada, aparece en un primer tiempo en la secta de los Pitagóricos hacia el siglo V a.C. época en que su descubrimiento crea la primera gran crisis de la matemática. Un segundo tiempo que destacaré se sitúa en el siglo III a.C., donde veremos cómo se resolvió la crisis, antecedente que están publicados en Los Elementos de Euclides con la teoría de los inconmensurables. Un tercer tiempo, esta dado por el desarrollo del Álgebra por los árabes hacia el 850 d.C. Su máximo representante, conocido como el Padre del Álgebra, Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi, en su obra *al-jabr w'al-muqabalah*, expone seis tipos de ecuaciones en cuyos métodos de resolución involucra

⁸ Estos 5 períodos han sido organizados luego de la recopilación y organización del desarrollo evolutivo del concepto de raíz.

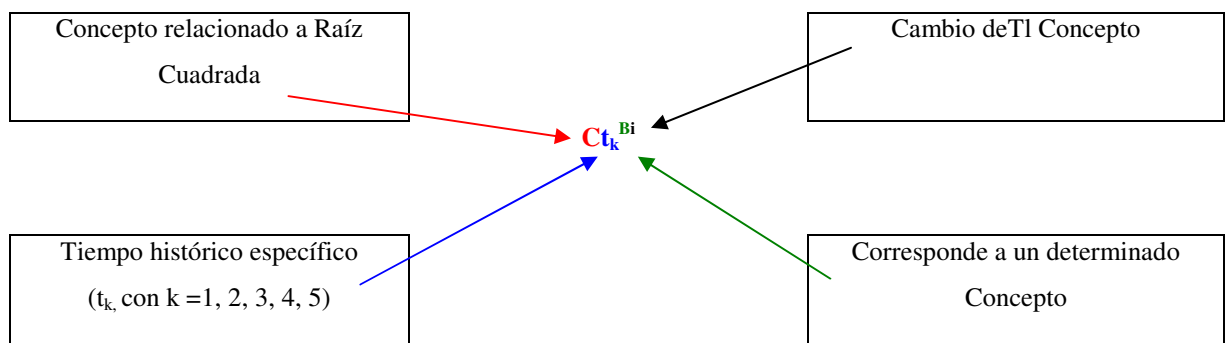
las palabras raíz y cosa, de donde hay un primer indicio de dos conceptos de raíz que más tarde se especificarían.

Un cuarto tiempo se sitúa en el siglo XVI, época en que surgen matemáticos italianos y alemanes comienzan a estudiar ecuaciones de grado mayor que 2 y en que aparece el signo radical $\sqrt{\quad}$.

Un quinto tiempo, viene dado por el desarrollo de la teoría de funciones en el siglo XVII en adelante y hasta nuestros días en que junto a la teoría de conjuntos del siglo XIX, se desarrolla el concepto de número real y de función real de variable real. Estas nuevas teorías junto al inmenso desarrollo de la teoría de ecuaciones, de los números complejos y del análisis, establecen claramente la bifurcación de los conceptos de raíz cuadrada que en el saber enseñado ofrecen confusión, por una anomalía en la transposición didáctica.

El concepto de Raíz cuadrada aparece vinculado a otros conceptos como el Teorema de Pitágoras, los Números irracionales, los segmentos inconmensurables, las ecuaciones cuadráticas, Signo Radical y la Función Radical. Explicaremos a continuación la nomenclatura empleada:

Tabla 3: Nomenclatura utilizada para la representación longitudinal



Conceptos desarrollados en la representación longitudinal

A = Teorema de Pitágoras

B = Números irracionales

C = Segmentos Inconmensurables

D = Ecuaciones cuadráticas

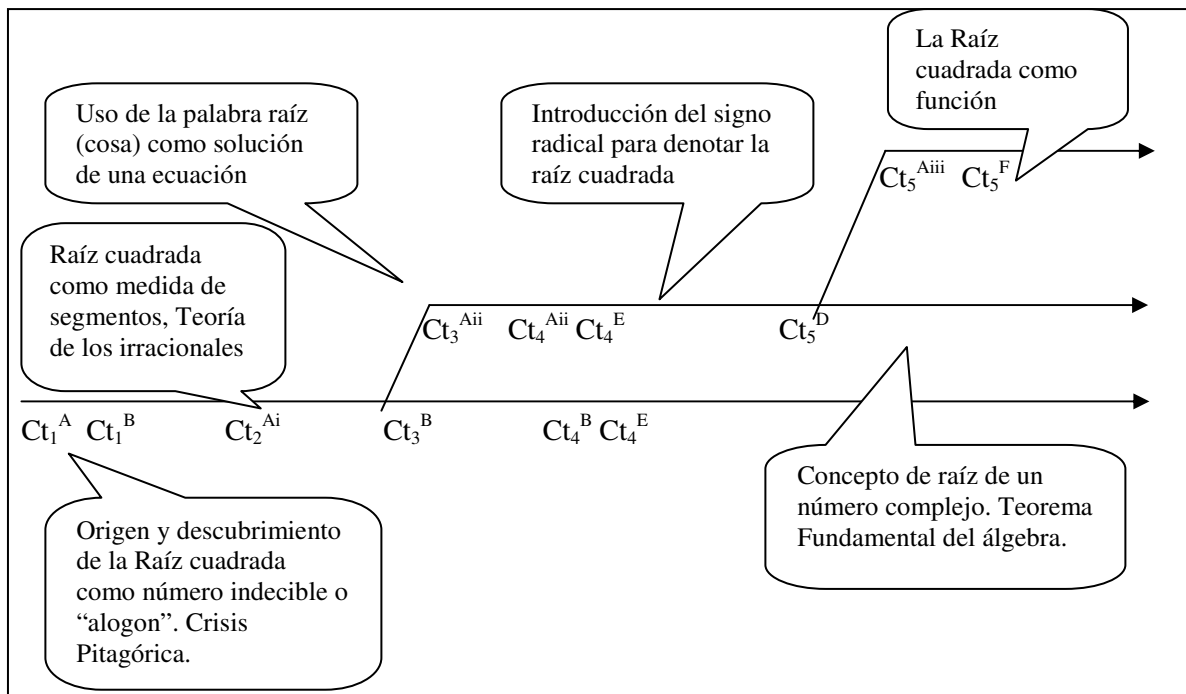
E = Signo Radical

F = Función Radical

Tabla 2.2. Autores matemáticos y su aporte a su divulgación escrita.

	Aporte	Lugar	Nomenclatura
500 a.C.	Pitagóricos	Grecia	Ct_1^A, Ct_1^B
300 a. C.	Euclides	Grecia	$Ct_2^A, Ct_2^B, Ct_2^{Ai}$
(800 – 850) d.C.	Árabes (Al - Khwartzimi)	Arabia	Ct_3^{Aii}, Ct_3^B
1500 – 1650	C. Rudolff, N. Chuquet, R. Bombelli,	Italia, Alemania	$Ct_4^E, Ct_4^{Aii}, Ct_4^B$
1.700 d.C en adelante	C. Gauss, G. Cantor, Euler.	Inglaterra, Alemania	$Ct_5^{Aiii}, Ct_5^D, Ct_5^F$

Podemos resumir la Representación longitudinal de los conceptos de Raíz Cuadrada en el tiempo mediante el siguiente esquema propiciado por el Modelo de Toulmin:



Toulmin por medio de su Modelo, permite observar 3 ramas en la que ha intervenido el concepto de raíz cuadrada en su propia historia y entonces ofrece una alternativa para relacionar este concepto con el uso del signo radical, con la función radical, y con el concepto de raíz de un número complejo o bien sinónimo de solución de la ecuación cuadrática (en particular) con coeficientes complejos.

El Modelo de Toulmin, permite organizar la evolución y el cambio conceptual que se produce sin riesgo de confusión hasta que aparecen y son legitimados los números negativos. Así, a partir de ese momento, es necesario distinguir dos acepciones de Raíz cuadrada, desde el ámbito de los números reales y las funciones reales de variables real y el nombre que se le da a cada una de las dos soluciones de una ecuación del tipo $x^2 = a$, en el cuerpo de los números complejos. La forma en que se resuelve este problema, se ajusta a las tres vías planteadas por Toulmin:

1. Refinando la terminología. Para ello, se define

Para cada número real positivo a , existe un único número real positivo b tal que $b^2 = a$. Éste número b , lo designaremos por la notación $b = \sqrt{a}$, o bien $b = a^{\frac{1}{2}}$, y lo llamaremos la raíz cuadrada principal de a , o bien Radical de a . Se extiende esta definición al número real cero, de modo que, $\sqrt{0} = 0$.

2. Introduciendo nuevas técnicas de representación. En efecto,

i) Se utiliza el signo $\sqrt{\quad}$ sólo para denotar el único número no negativo es el radicando, es decir, la expresión \sqrt{a} indica aquel único número no negativo cuyo cuadrado es a . Esta representación también extiende al caso de radicales de orden par.

ii) Para expresar las raíces cuadradas de un número complejo z , utilizamos los síse embolos: ϖ_1, ϖ_2 . Caso particular de las raíces enésimas de un número complejo z , que corresponden a los n números complejos: $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \dots, \varpi_n$. Ahora bien, en el caso del empleo del signo radical, se opta por indicar que las raíces cuadradas de $x^2 = a$ para $a \geq 0$ son \sqrt{a} y $-\sqrt{a}$. También se puede generalizar esto a las raíces de orden par de un real no negativo h , caso que en \mathbb{R} son siempre exactamente dos (para $h \neq 0$), las cuales se representan por $\sqrt[2n]{h}$ y por $-\sqrt[2n]{h}$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

3. Modificando los criterios para identificar casos a los que sean aplicables las técnicas corrientes.

Para el caso de la función raíz cuadrada, sus propiedades se limitan a aquellos números admisibles por el dominio y el recorrido de dicha función.

Finalmente, cabe señalar que no se ha realizado un análisis más detallado con este modelo, por ejemplo sobre el concepto de radical, puesto que se puede obtener desde la propuesta de Martínón (1990), para evitar la paradoja de Euler que enunciamos en el apartado anterior y que como también ha estudiado Gómez (2009), comprende un problema no matemático, sino un problema para la didáctica de las matemáticas.

2.10 Síntesis del capítulo.

En este capítulo se ha levantado el marco de referencia, constituido por un grupo de desarrollos teóricos vinculados entre sí, lo que caracteriza a la investigación en las didácticas específicas, en particular, de la Didáctica de las Matemáticas en su nueva visión como disciplina científica que se nutre de otras áreas.

Luego de darse los elementos distintivos de lo que se entiende por Didáctica de las Matemáticas, como indica Chamorro (2003), para el siglo XXI, se expone la teoría de la Transposición Didáctica, que ofrece los lineamientos centrales de la tesis, posicionándonos desde ésta perspectiva teórica para analizar los problemas con la adaptación o adecuación del contenido matemático, lo que nos permite de su lenguaje trabajar con las nociones de Saber erudito, Saber a Enseñar y Saber enseñado principalmente.

Aunque interesante hubiera sido una aproximación a la Transposición Didáctica desde una visión más analítica y polémica, en esta investigación se optó por considerarla como columna vertebral cuyo foco está en el análisis conceptual de las ideas, las representaciones y actividades o medios didácticos ligados a la difusión de las raíces y los radicales.

Seguimos el camino ahondando en la historia de las matemáticas y de la educación matemática, que permite dar los fundamentos del análisis histórico epistemológico del contenido matemático para este tipo de investigaciones, conforme a la elección de períodos para desarrollar la investigación, la que en nuestro caso la justificamos con el auge de las reformas de las matemáticas modernas y su posterior crisis mundial que significó, como punto de inflexión en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y observar entonces qué implicaciones trajo desde su aplicación en el currículo chileno. No se puede dejar fuera el sentido filosófico que está detrás del desarrollo de las matemáticas, de su naturaleza y de las concepciones que tiene todo responsable divulgador de ellas. Por esto se complementa el posicionamiento epistemológico con la visión naturalizada de la ciencia y la emergencia de una nueva filosofía de las matemáticas, que se aleja de los obsoletos cánones de dogmatismo e infalibilidad que ocultaban su consideración como construcción humana.

Se desarrolló la importancia que está teniendo desde hace ya algunos años el estudio de manuales escolares como objetos de análisis, por el interés histórico que tienen al ser testigo de las representaciones, paradigmas y concepciones de distintas épocas y cuyo registro trasciende a las épocas en que son creados. Todo esto entorno a la creciente línea de investigación que significa del análisis de libros de texto en el mundo.

Finalmente, se presentó por una parte, un estudio histórico – epistemológico evolutivo, según el lenguaje de Toulmin (1977), para la construcción en la historia del concepto de raíz y su derivación a la notación actual de radical. Por la otra, se describió el estatus matemático de referencia para tomarlo como saber sabio y levantar desde él las categorías de análisis que se explicarán en el siguiente capítulo de la metodología utilizada.

CAPITULO 3

Marco Metodológico

3.1 Introducción.

Uno de los momentos cruciales en toda investigación es aquel en que se discute, analiza y define la metodología de trabajo, que para este caso particular requirió de varios procesos marcados por avances, pero también de retrocesos, de búsqueda de información en la literatura experta y también de otros documentos académicos (tesis, artículos, etc.) que se han ocupado de temáticas similares.

Concibo de este modo, que la metodología responde al motor de funcionamiento de toda investigación, por lo que cuidadosamente se ha discutido cada uno de los pasos que se han dado, al mismo tiempo de realizar pequeños estudios pilotos para probar el ajuste de los instrumentos de recopilación de la información, todo esto en un marco de rigor científico que se expone cada vez que ha sido necesario precisar.

En este capítulo, se aborda el desarrollo metodológico de la tesis, exponiendo tanto las elecciones de formas de trabajo, desde las más generales, tales como el paradigma bajo el cual se cobija la investigación, hasta elementos específicos como las técnicas utilizadas.

Al respecto se fundamenta el trabajo realizado en base al paradigma cualitativo con un diseño descriptivo y utilizando los elementos de la investigación histórica en educación, insistiendo su empleo en Didáctica de las Matemáticas (marco referencial en el que nos posicionamos), estudiando las fuentes (libros de texto y programas oficiales) por medio de técnicas de análisis de dos tipos: Histórico - crítico y de contenido, en los cuáles se consideran los procesos de validación interna y externa, que comprenden los criterios de rigor.

Una vez realizada la parte de justificación de la metodología, se describe el plan de recogida de datos, con sus respectivos instrumentos (3 tipos de matrices) para obtener

la información necesaria para los fines perseguidos, los que fueron validados por un conjunto de jueces expertos para asegurar su reproductividad, característica imprescindible en toda investigación de calidad (Kilpatrick, 1994). Se presenta también los elementos de la muestra intencionada y los procesos de selección y refinamiento de las fuentes consultadas como la justificación de los tres períodos acaecidos entre 1965 y 2009.

Luego se procede a narrar el análisis de los datos en cuánto a determinar una caracterización de los saberes a enseñar provistos en los libros de textos y los propuestos en los programas ministeriales. Todo esto a la luz del análisis histórico – epistemológico del saber erudito que se triangula con el saber a enseñar en los textos y en los programas, lo que se desencadenará en las conclusiones (capítulo 8) respecto de la verificación o refutación de las hipótesis y de los objetivos de esta investigación.

3.2. Diseño: Fundamentos y Técnicas.

3.2.1. Consideraciones previas.

Para estudiar las diversas rupturas epistemológicas que se puedan evidenciar en la divulgación del álgebra de radicales en libros de texto¹, este trabajo se enmarca en el paradigma cualitativo de investigación, el que resulta apropiado para los fines descritos en la presentación de esta tesis, puesto que el foco de interés está en describir, identificar y caracterizar los fenómenos de transposición didáctica del álgebra de radicales en las fuentes de mayor consulta del profesor a la hora de planificar y orientar sus clases, fuentes que corresponden como ya se señaló en el apartado 2.7. a libros de texto

¹ Esto es, en la transformación del saber matemático de referencia al saber a enseñar, donde tiene una participación intermedia el Ministerio de Educación como protagonistas del segundo acto de transposición didáctica, al elaborar los decretos y programas que dan la directriz de la selección de contenidos aptos para la nación y en algunos casos (los programas actuales), ofrecen orientaciones y actividades genéricas explícitas del cómo hacer en el aula.

(diseñados entre otros objetivos, para servir de apoyo a la labor docente en esta dirección) y en los programas oficiales de estudio, los que sin a veces ser consultados por los profesores en su cabalidad, presentan los contenidos mínimos que enseñar a nivel país. Estos dos dispositivos (programas y libros de texto) en la mayoría de los casos determina el tratamiento de los contenidos en el aula y por tanto la administración que el profesor da a la transposición del saber a enseñar al saber enseñado. Es así que la naturaleza de los datos que se obtienen según Bisquerra (1989) justifica el paradigma cualitativo, pues dice, tales datos son filtrados por el investigador. También Sherman y Webb² (1988) al respecto indican:

“Podemos resumir todas las características de la investigación cualitativa y señalar que el término cualitativa, implica una preocupación directa por la experiencia tal y cómo es vivida, sentida o experimentada (p.7)”.

Esta descripción es muy apropiada pues refleja íntegramente lo que ocurre cuando el docente se entera de los contenidos que deberá trabajar en tal o cual nivel escolar. Por lo demás, no es propósito de este trabajo realizar mediciones o experimentaciones, por el contrario, me baso en métodos no empíricos, dentro de los cuáles se encuentra la Investigación Histórica en Educación, específicamente, por medio de un análisis histórico – epistemológico del álgebra de radicales en las matemáticas escolares, que se pueden abordar mediante el estudio de los programas y por una parte y por otra de los libros de texto de mayor uso. Estas fuentes corresponden a lo que en los estudios históricos se denominan archivos o documentos, a los que será necesario aplicarle la técnica de Análisis de Contenido (AC), la que permitirá colocar el énfasis no sólo en una cuestión de tipo histórica, sino también didáctica, por la especificidad del contenido del álgebra de radicales y porque no solo se trata de hacer una descripción de hechos, sino aprovecharla para levantar las rupturas de la Radicación al efectuar la vigilancia epistemológica entre sus estatus como Saber Erudito y Saber a Enseñar como se indicó en el capítulo 1.

² Extraído de Sandín, M. Paz (2003) Investigación cualitativa en Educación. Madrid, España.

Desde los años 70, se da un vuelco teórico de la Didáctica de la Matemática concebida desde las teorías psicológicas del aprendizaje a estructurarse como disciplina científica incipiente (ahora en pleno desarrollo) e impulsada en Francia por G. Brousseau, poniendo énfasis en los contenidos propios de la matemática, más que llegar a las disciplinas por una didáctica general y reducida a la metodología. Comienzan así a aparecer líneas de investigación como la “epistemología genética” y la “historia de los conceptos matemáticos” que según Rojano (1994)³, nacen bajo el propósito de “identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto”. Actualmente, una nueva línea trabajada por diferentes investigadores y sociedades de Educadores Matemáticos en el mundo es el análisis histórico – epistemológico en la investigación en didáctica de la matemática, desarrollada en Francia por la “Commission Inter IREM” en Epistémologie et Histoire des Mathématiques, con una buena lista de investigaciones, tal como lo han hecho investigadores en Didáctica de la Matemática en España que conforman un reconocido grupo de Investigación en Historia de la Educación Matemática y son miembros del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico PNA.

Gómez (2003), recopila seis corrientes al interior de la investigación histórico – epistemológica:

1. El enfoque de la enseñanza desde una perspectiva histórica.
2. El enfoque de los obstáculos epistemológicos.
3. El enfoque del modelo teórico – local.
4. El análisis de los libros de texto.
5. El enfoque de la reproducción en los estudiantes de las etapas en la historia.
6. El enfoque sociocultural.

³ En “La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza”. Revista Enseñanza de las Ciencias, 12(1), 45 – 46.

Todas ellas dice – “son el reflejo de un intento de recuperación de la Historia de las ideas para el provecho de la Didáctica de la Matemática”. Particularmente la corriente ubicada en el número 4, es la que nos proporcionará la orientación para los objetivos que en este trabajo nos hemos propuesto.

El diseño es de tipo descriptivo, según los objetivos que se han planteado. En efecto, y tal como señalan Cohen y Manion (1990), la investigación descriptiva consiste en observar individuos, grupos, instituciones, métodos y materiales (que es nuestro caso), con el fin de describir, comparar, clasificar, analizar e interpretar las entidades o acontecimientos que en mi trabajo se refieren a los fenómenos de transposición didáctica del álgebra de radicales y que han ocurrido previamente a la administración que de ésta hace el profesor. Bisquerra (1989) al respecto se refiere a un diseño descriptivo como aquel en que no hay manipulación estadística de las variables, concepción que se corresponde con el tratamiento realizado.

Siguiendo al mismo autor, este diseño, incluye a la investigación histórica, la que utiliza principalmente metodología cualitativa. Por otra parte, Van Dalen y Meyer (1981), desarrolla su concepto de investigación descriptiva indicando que es aquella que trata de describir de modo exacto las actividades, objetos, procesos y personas de un determinado momento. Los mismos autores proponen una tipología de investigaciones con diseños descriptivos entre los que se encuentran los análisis documentales, del que trata este estudio, en relación a las fuentes que analizamos.

3.2.2. Técnicas de Investigación utilizadas y criterios de rigor científico.

Presentamos a continuación las dos técnicas que en sentido complementario una respecto de la otra, son utilizadas para el análisis de los programas y de los libros de texto. Una de ellas es la **técnica del análisis Histórico – crítico**, que da el aspecto

general y que permite centrarse en los períodos de los cuales se recoge la información con su contexto propio y la técnica de **Análisis de contenido**, la que entra en el detalle de lo que interesa observar en términos conceptuales ya en la matemática transpuesta en las fuentes objeto matemático. La complementación entre ambas técnicas se justifica en el cumplimiento de los criterios de rigor que se establecen en la investigación histórica, referida a la validación y confiabilidad, que opera aquí en términos de lo que se denomina crítica externa y crítica interna a las fuentes.

3.2.2.1. La Técnica del Análisis Histórico – Crítico.

Para Cohen y Manion (1990), la investigación histórica se define como “La situación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer los hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados”. Al explorar el objeto matemático Radical respecto de su tratamiento y de su ecología en la matemática escolar, se intenta establecer qué rupturas aparecen respecto del saber matemático de referencia. El conjunto de evidencias de la que hablan estos autores, viene dada por los escritos en marcos curriculares y libros de texto, de donde se construirán las conclusiones. Este análisis, permitirá mostrar el origen y la evolución del objeto en los tres períodos en que se ha desarrollado las últimas tres reformas educacionales. Bisquerra (1989) se refiere a la investigación histórica como aquella que: “...examina el pasado con el propósito de describir el presente. Es por tanto, un tipo de investigación descriptiva que estudia la conexión entre hechos que han ocurrido en el pasado, en lugar de la relación entre variables en el presente”.

La investigación histórica extrae los datos a partir de fuentes que pueden ser primarias o secundarias. Las primarias llamadas también de “primera mano”, son las originales para el interés del problema que se estudie y por tanto es una elección relativa. Las fuentes secundarias en cambio se utilizan cuando es muy difícil acceder a fuentes originales. En esta investigación, los programas y decretos existen y son de primera

mano. Habitualmente, los materiales escritos de divulgación como libros de texto o narraciones de hechos, son considerados dentro de las fuentes secundarias, pues su relato depende del punto de vista del autor y para hechos históricos es probable que su escrito esté contaminado de su propia visión respecto de tales hechos. Sin embargo, en nuestro caso, los libros de texto constituyen parte de las fuentes primarias, ya que como señala Van Dalen y Meyer (1981):

“En algunos casos, una información puede considerarse como fuente primaria o secundaria, según la manera en que se utiliza. Por ejemplo, un texto de historia general de la educación se halla considerablemente alejado de los acontecimientos y es, en consecuencia, una fuente secundaria. Pero si un investigador estudia cómo organizaron los autores los textos sobre la historia de la educación y la importancia que le atribuyeron a los diversos temas, tales textos se convertirían en fuentes primarias”.

Los mismos autores especifican que las fuentes primarias pueden clasificarse en **Archivos** (que tienen la intención de transmitir información) y los **Restos** que son por lo general objetos creados en alguna época pero que no contienen información con fines de divulgación. Dentro de los archivos, proponen seis tipos:

1. Archivos oficiales.
2. Archivos personales.
3. Tradiciones orales.
4. Archivos pictóricos.
5. Material de publicaciones.
6. Archivos mecánicos.

Los archivos oficiales corresponden a documentos elaborados por los gobiernos. Es así como los programas ministeriales y decretos se ajustan perfectamente a esta descripción. De igual modo, encontramos el material de publicaciones, en el que se encuentran los **libros de texto**, que transmiten información que se ha convertido en un saber de referencia cultural, pero que para nuestro propósito lo utilizaremos como fuente de consulta u orientación para la epístome del profesor.

En la literatura consultada, varios autores, (Van Dalen y Meyer, 1981; Cohen y Manion, 1990, Aróstegui, 2001, Bisquerra, 1989), coinciden en los dos criterios de rigor que deben ser chequeados previamente al utilizar “documentos”. El primero es denominado “crítica externa” y se refiere a probar la autenticidad del documento, lo que en cada matriz de análisis estará tabulado por la época, lugar y autoría. Tanto los libros de texto como los documentos oficiales del Ministerio de Educación, son auténticos y no hay riesgo de adulteración. Cabe señalar que la importancia está en la obra escrita, y no en el autor directamente, pues de lo contrario, debiera realizarse una entrevista con los autores de los textos, lo que no es propósito alguno de esta tesis.

El segundo criterio lo denominan “crítica interna” y se realiza luego de haber pasado la valla de la crítica externa. Se trata ahora de establecer la precisión y veracidad del contenido. Éste propósito se trabajará con la componente (AC), cuya misión es entonces, asegurar la confiabilidad de los datos de los documentos Van Dalen y Meyer, (1981).

3.2.2.2. La Técnica del Análisis de Contenido.

Entendemos por Análisis de Contenido (AC), una técnica de recopilación de datos, que adoptándola para el caso de los contenidos matemáticos, y, específicamente del álgebra de radicales, que permitirá encontrar evidencias de rupturas epistemológicas con el saber matemático erudito. La justificación de la elección de ésta técnica radica en el estudio que hace de lo que se divulga y cómo se divulga. Al respecto, Aróstegui (2001) la define como el “Conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones”. Su sistematización requiere de la elaboración de codificaciones por categorías clasificatorias, las que se presentan en matrices de análisis que se desarrollan en el punto 3.4. Por ahora, se justificará el empleo de esta técnica y su adecuación con la presente tesis.

Van Dalen y Meyer (1981) relacionan esta técnica con el análisis histórico:

“el análisis documental, que en algunos casos, se denomina análisis de contenido, análisis de actividad, o análisis de la información, guarda una estrecha relación con la investigación histórica”.

Los primeros usos del análisis de contenido fueron de orden cuantitativo. Se utilizaban tablas de frecuencias para el recuento de palabras. Cohen y Manion (1990), se refieren a una de las etapas del AC: La cuidadosa fase de la elaboración de categorías y unidades de análisis específicas:

“Se determinan normalmente las categorías después de la inspección inicial del documento y cubrirán las principales áreas del contenido...las unidades de análisis pueden incluir: una palabra, un tema, un personaje, una oración, un párrafo...”

Otro empleo que viene rápidamente a la imaginación, sería un examen del contenido de los libros de texto de diferentes puntos de la historia reciente como medios de indicar, digamos, las diferencias culturales, la censura cultural o el cambio cultural”.

Vemos cómo en este último párrafo, se instala el tipo de trabajo que sigo en esta investigación. En lugar de describir lo relacionado con lo cultural, el análisis del contenido de los libros de texto de matemáticas, nos permitirá indicar las diferencias conceptuales y de tratamiento del álgebra de radicales, la omisión (en lugar de censura) de información relacionada con los hábitat de los conceptos y sus teoremas con propósitos de simplificación para el aprendizaje (que ya veremos, mutila la matemática y la transforma sólo a nivel operacional no razonable), y por último diríamos da una luz respecto de cómo cuidar estos elementos para una posible y anhelada existencia de cambio conceptual transversal (en un mismo nivel de curso) o a nivel longitudinal (en distintos cursos) que sea la ruta que debieran adquirir las fuentes de transmisión de los conocimientos no sólo matemáticos sino de toda la cultura.

3.3. Plan de Recogida de Datos.

3.3.1. Fuentes documentales para localizar el Saber matemático de los radicales.

Al realizar el análisis histórico – epistemológico para construir la visión del Saber Matemático de referencia con el que se hará la vigilancia epistemológica respecto del saber publicado en programas oficiales y libros de texto, se revisó un total de 23 obras de las cuales 17 corresponden a la Historia de la Matemática y 6 al estatus matemático de la Radicación.

Las obras consultadas respecto del análisis histórico general y que permitió desarrollar los puntos 2.8.1. al 2.8.3. del capítulo 2, están escritas durante los siglos XX - XXI, por lo que conforman documentos de primera mano en el caso de autores originales. Sin embargo, también se consultaron obras traducidas (en rigor de segunda mano) lo que podría poner en riesgo la validez externa. Para abordar este problema, se escogieron 17 obras independientes entre sí, esto es, que ninguna hiciera referencia expresa de la otra en las temáticas revisadas. Con esto y previo a desarrollar el escrito de las secciones mencionadas, se llegó una saturación de la información como criterio de rigor, obteniéndose las mismas descripciones en las obras estudiadas. Así no sólo se asegura la validez interna, sino además la confiabilidad o validez interna. Las obras que fueron consultadas son:

1. Bell, E.T. (1940). *The Development of Mathematics*. New York. Mc Graw – Hill Book.
2. Boyer, Carl. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid, España. Alianza Editorial Textos.
3. Cajori, F. (1928). *An history of mathematical notations*. Chicago, E. U. A.:The open court pub Company.
4. Colerus, E. (1943). *Historia de la Matemática. De Pitágoras a Hilbert*. Traducción directa del Alemán por Caplán, N. Buenos Aires. Argentina. Ediciones Progreso y Cultura.
5. Collette, J. (1973). *Histoire des Mathématiques I & II*. Montreaux. Suiza. Éditions du renouveau pédagogique.
6. Cousquer E. (1998). *La Fabuleuse histoire des nombres*. Paris, Francia. Diderot Editeur.

7. Depman, I. (2007). Del Álgebra clásica al Álgebra Moderna. Una breve introducción histórica. Traducido del ruso por Navarro C. y Romero A. Moscú. U.R.S.S.
8. Dhombre, J. (1978). Nombre, mesure et continu épistémologie et histoire. Paris, Francia. Nathan, Cedic.
9. Heath, T. (1981). A History of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, INC.
10. Hofmann, J. (2005). Historia de la Matemática. Desde el comienzo a la Revolución Francesa. Traducción directa del Alemán por Valls, V. y Fernández, G. México. Limusa.
11. Kline, M. (1972). Mathematical thought from ancient to moderns times. Vol. I, II, III. New York, E.U.A. : Oxford Univerity press.
12. Newman, J. (1968). El Mundo de las Matemáticas Vol I y IV. España. Ediciones Grijalbo.
13. Pérez, M. (2006). Una Historia de las Matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes. Tomo I y II. Madrid. España. Visión Net.
14. Rey Pastor, Babini, J. (1951). Historia de la Matemática. Buenos Aires, Argentina: Espasa –Calpe.
15. Smith, D. (1958). History of Mathematics Vol. I, II. New York. Dover Publications, INC.
16. Van der Waerden, B. L. (1983). Geometry and álgebra ancient civilizations. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
17. Wussing, H. (1998). Lecciones de Historia de las Matemáticas. Traducido del Alemán por Ausejo, E. y otros. España. Siglo XXI Editores, S.A.

Para el análisis del estatus erudito del álgebra de Radicales, se consultaron las siguientes obras:

1. Bourbaki, N. (1964). Éléments de Mathematiques. Álgebre. Hermann. París. Francia.
2. Martinón, A. (1990). Nota sobre radicales y raíces. Revista Números, vol. 20. España.
3. Klein, F. (1908) Matemáticas desde un punto de vista avanzado.
4. Novelli, A. (2005). Elementos de Matemáticas. Buenos Aires. Argentina.
5. Praus W. (1996). Algunos temas sobre el lenguaje básico de la Matemática. Instituto de Matemáticas, Universidad Católica de Valparaíso. Texto sin publicar. Chile.
6. Zamansky, M. (1967). Introduction À l'algèbre et analyse modernes. París, Francia. Dunod Editeur.
7. Spivak, M. (1970). Calculus. París. Editorial Reverté.

3.3.2. Períodos históricos contemplados en esta investigación.

Como se ha hecho referencia en el marco teórico, específicamente en el apartado 2.5., la reforma de las matemáticas modernas fue un hito que impactó fuertemente en la enseñanza de las matemáticas en el mundo y cuyas directrices llegaron a Chile con la implementación de la Reforma Educacional de 1965. Por esto, se ha decidido mirar qué ha sucedido con la enseñanza de las matemáticas en Chile a partir de éste hecho mundial, su impacto en nuestro país en relación a los cambios curriculares y las orientaciones para el docente que han sido publicadas en los programas oficiales, que como sabemos, se basaba en una enseñanza desde una mirada dogmática y axiomática de la matemática, alejada de los problemas situados en el mundo real, apostando por el un importante desarrollo de la abstracción.

Por otra parte, con la implementación de la Reforma Educacional Chilena de 1965, se entra desde 1966 en la estructura del sistema educacional de 8 años para la enseñanza general básica y 4 para la enseñanza media, de modo que entre 1966 y 2009 las reformas que se han producido han tenido en común esta estructura y por otro, un lenguaje común al hablar de Matemáticas como una asignatura, eliminando la disparidad que se tenía antes de 1965, en que los establecimientos impartían matemáticas comerciales o matemáticas y física.

Esto justifica mi elección para centrar esta tesis en tres períodos limitados por las últimas tres reformas acaecidas en los años 1965, 1981 y 1998. Además, como se verá en el Capítulo siguiente, la reforma de 1965 es la de mayor trascendencia por los cambios estructurales que hasta hoy tiene sus repercusiones, motivo por el cual se le da un espacio mayor en su descripción socio – histórica en el capítulo 4. Cabe señalar que el primer período no se considerará curricularmente desde 1965, sino desde 1969, pues es desde éste año que se instala en el segundo año de enseñanza media el álgebra de radicales, de modo que el primer período analizado corresponde a 1968 - 1980.

Un segundo período viene limitado por la reforma educacional de 1981 que como característica principal, modifica el nivel en que se enseñará por decreto el álgebra de radicales, llevándolo al tercer curso de la enseñanza media, el que se hace efectivo desde 1984. De este modo el segundo período de análisis va de 1984 a 2000.

Finalmente, durante la década de los 90' y con el traspaso del gobierno militar al democrático, aparece la actual reforma cuyo decreto con los nuevos contenidos aparece en 1998 pero al ser gradual su incorporación a la enseñanza media, se hace efectivo desde el año 2001, año en que se comienza a aplicar el programa que contiene al álgebra de radicales en tercer año medio (como en el período anterior) y que curricularmente no tendrá cambios sustanciales hasta 2009, año en que se comienzan los estudios y propuestas de un Ajuste Curricular, que no han sido implementadas mientras se redactaba esta investigación, pero que tendrá lugar con la llegada del bicentenario, lo que esta fuera de los alcances de esta tesis por motivos obviamente temporales.

Como se trabaja en el **análisis de libros de texto** y marcos curriculares en Educación Matemática de estos tres períodos históricos en Chile ya descritos, se han adoptado como técnicas de análisis: El análisis de contenido y el análisis histórico – crítico, los que se aplicarán a:

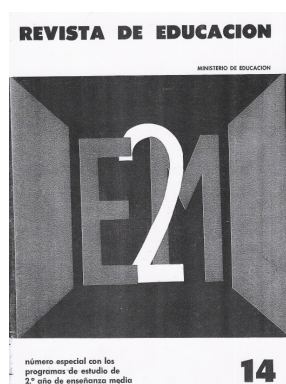
- a) Los marcos curriculares aparecidos en 1969, 1981 y 2000.
- b) Los libros de texto⁴ de mayor uso por profesores y estudiantes.

⁴ Algunos libros de texto datan de años anteriores a 1965. El que se hayan incluido para su análisis, se fundamenta en el uso que se hace de ellos, siendo libros clásicos legitimados por diferentes generaciones en el estudio de las matemáticas escolares. Cabe señalar que estos manuales, presentan el contenido que es acá objeto de análisis, sin estar necesariamente en una visión acorde con los programas ministeriales de una u otra época.

3.3.3. Programas Oficiales de Estudio.

Para obtener un ejemplar de los programas de estudio⁵ y decretos correspondientes a las tres últimas reformas que incorporan cambios en los marcos curriculares, se visitó en 3 oportunidades la Biblioteca del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas CPEIP, biblioteca que conserva estos documentos. Así se ha podido recopilar el material necesario, esto es, programas y decretos conformes a cada uno de los tres períodos. Para el caso de los dos primeros, los programas y decretos que los aprueban aparecen publicados en la Revista de Educación, órgano Oficial del Ministerio de Educación, que tuvo en aquel entonces la misión de difundir el nuevo currículo para las distintas áreas. Ésta publicación de periodicidad mensual, debía mantener al día a los agentes educativos, (profesores, autoridades de los establecimientos escolares, entre otros) y tiene al Ministerio de Educación como propiedad intelectual. La revista aparece en 1928 y está constituida por 93 ediciones hasta 1937. Es en 1941 cuando vuelve a aparecer, contando otras 96 ediciones hasta 1964. Un tercer período de publicaciones se da desde 1967 a la fecha, superando hasta la fecha de redacción de esta tesis, sobre las 330 ediciones. En la actualidad, esta revista también es on – line y puede visitarse en la dirección electrónica:

www.mineduc.cl/revista.



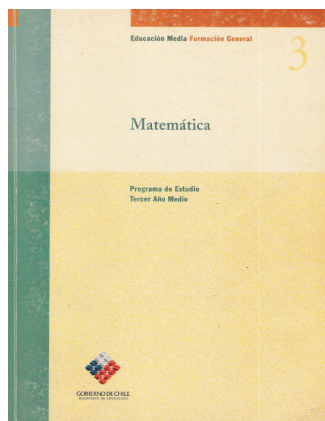
De su tercer período y específicamente de su décimo cuarta edición de marzo de 1969, se extraen los programas y decretos para la reforma gestada desde 1965. En su portada indica que se trata de un número especial con los programas de estudio del 2º año de enseñanza media, nivel en que se encuentra la radicación entonces, por mandato oficial.

⁵ Definido como el documento de carácter normativo que expone los objetivos, la secuenciación de los contenidos de enseñanza y las actividades que deben aplicarse en conformidad al plan de estudio.

Para los programas de 1981, se revisó el número 94 de la Revista aparecida en Julio de 1985, pues ésta contiene tanto los fundamentos como el programa de 1981 con ligeras modificaciones que no alteran los contenidos y objetivos que allí es sugerido para el objeto Radicación y por tanto, no producen efectos no deseados sobre las descripciones que interesa analizar.



Finalmente, aparece el programa de la reforma de 1996, pero aquel es difundido en el decreto N°220, de 1998, en el que instala que los nuevos programas serán aplicados en los establecimientos en forma gradual, correspondiéndole al año 2001 tal aplicación en el tercer año de enseñanza media curso en el que se inserta la radicación.



A diferencia de los dos períodos de reforma anteriores, ésta última crea librillos⁶ que desarrollan ampliamente (en relación a sus predecesores) los contenidos, aprendizajes esperados (en lugar de objetivos como antes), orientaciones metodológicas e incluso actividades genéricas tanto para desarrollar el curso como para evaluar los aprendizajes de los estudiantes. Por esta razón, los análisis de estos últimos programas serán más extensos, pues requieren de la examinación de las actividades que proponen y los énfasis que están explicitados nítidamente, en relación a los programas anteriores que no traen actividades modeladoras de lo que se espera que haga el profesor en el aula.

⁶ Hemos querido señalar como librillos a estos documentos y no como manuales, con el propósito de no producir confusión, pues en esta tesis, usamos el término manual como sinónimo de libro e texto, tal como se hace en la mayoría de los países de los que hemos dado cuenta de investigaciones similares esta.

3.3.4. Selección de los libros de texto.

Se ha realizado una primera selección de libros de texto, representativos de cada período. El concepto de “representativo” lo utilizamos aquí en el sentido de obras que han dejado huella⁷, efecto que se ha establecido bajo los siguientes criterios de selección de la muestra intencionada⁸:

- Disponibilidad en bibliotecas, en librerías modernas como en puntos de venta de libros antiguos. Esto conduce a una muestra intencional y por conveniencia (Maz, 2003).
- Relevancia del autor (o autores): Se revisa aquí la trascendencia del equipo de autoría, cargos ejercidos en instituciones, grados académicos, influencia profesional.
- Relevancia de la Editorial: Se indaga su permanencia en el mercado, posicionamiento público, prestigio y/o antigüedad de la editorial.
- Con el contenido de la **Radicación tratado algebraicamente** y dirigido a la enseñanza secundaria o media.

Para que la selección realmente estuviera compuesta por libros de texto de mayor uso, se consultó a expertos. Éste punto es necesario, según lo establecido por Van Dalen y Meyer (1981):

“es posible descubrir datos importante conversando con veteranos de la profesión, al explorar comercios en los que se venden objetos usados, librerías y buhardillas...”.

Al respecto, para seleccionar los libros de texto, se han realizado las siguientes acciones:

⁷ También se puede decir: los libros de texto de mayor uso, los más conocidos o posicionados en el mercado, en las familias, en hogares, los más promovidos por las empresas editoras, o simplemente los que en una o varias épocas fueron material de formación en las aulas de matemáticas.

⁸ Utilizamos una muestra intencional ya que en el tercer criterio C3, la selección de libros de texto se complementa con la consulta a expertos. (Bisquerra, p.83).

1. Averiguar su presencia en el mercado actual, mediante una simple consulta tanto en los buscadores de los sitios web de librerías de renombre, como visitando otras que no cuentan con este medio de publicidad.
2. Consulta a profesores en ejercicio.
3. Consulta a anticuarios y bibliófilos, vendedores de libros antiguos y nuevos ubicados en lugares estratégicos de ofertas de este tipo de material de apoyo, como ferias persas, Libreros de Torres de Tajamar, Sector San Diego y de Ferias del libro (nuevo y usado).
4. Consulta de los libros de texto de Matemática de Enseñanza Media que posee la Biblioteca Nacional.
5. Consulta de los libros de texto de Matemática de Enseñanza Media distribuidos por el MINEDUC.
6. Consulta a Bibliotecas de Universidades estatales que han formado Profesores al menos desde 1965 (PUC, UMCE - U Chile, USACH, entre otras).y los años de edición de los libros de texto.

Se estableció una selección de veinte libros de texto, agrupados según los tres períodos de estudio. Se obtiene así la siguiente distribución:

Tabla 3.1. Libros de texto Primer Periodo (1969 – 1981).

	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1*	1930	1	Francisco Proschle.	Curso de Matemáticas Elementales Álgebra correspondiente a los años 4°, 5° y 6° de humanidades. Conforme al programa oficial.	CERES
2*	1941	1	Aurelio Baldor	Álgebra**	Publicaciones Cultural S.A.
3	1968	1	Carlos Mercado Schuler	Álgebra. Enseñanza Media (Ex 3°, 4°, 5° y 6° Hdes.) y Pre-universitaria. Conforme al programa de 1969.	Universitaria S.A.
4	1970	1	Bélgica Parra Julio Villalobos	Matemáticas Álgebra 2° Año Educación Media Conforme a programas oficiales.	Universitaria S.A.
5	1974	1	Carlos Mercado Schuler	Curso de Matemáticas elementales I	Universitaria S.A.
6	1979	1	Silvia Navarro Juan Pezoa Octavio Suarez	Matemática II Medio	INDEA

*Una observación al respecto de este período: Los dos primeros libros de texto, a pesar de que sus ediciones originales no se sitúan en el período contemplado, su selección se debe al hincapié que hacen los expertos para su incorporación al análisis, basándose en la amplia difusión y uso de estos manuales. El caso de los autores Pröschle y Baldor, especialmente justifican su lugar por tratarse de autores cuyas obras aún permanecen en el mercado de las librerías modernas trascendiendo a los que sólo se encuentran en bibliotecas o puntos de venta de antigüedades. Se puede decir en opinión de los expertos que estos autores son los más trascendentes y que sus obras han permanecido en el tiempo hasta hoy. Se podría haber situado en cualquiera de los tres períodos, pero se ha resuelto dejarlo como parte del primero por una razón muy especial: Es a partir de los años 80 (segundo período en adelante para efectos de esta tesis) en que aparecen crecientemente los libros de texto para la educación media, con el surgimiento de editoriales que comienzan a publicar libros para este nivel de escolaridad. La gran mayoría antes sólo lo hacía en los niveles básicos o primarios. Siguiendo la recomendación de los mismos expertos que hemos señalado, estos textos fueron de gran ayuda y en muchos lo que había relacionado al contexto de la enseñanza media y con el desarrollo entre otros temas, del álgebra de radicales. Cabe señalar que aunque sean incorporados al primer período, se tendrá en consideración su trascendencia para un análisis global que se realizará en la triangulación final de los períodos en el octavo capítulo de esta tesis.

Tabla 3.2. Libros de texto Segundo Periodo (1983 - 2000)

	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	1983	1	Jarufe T. – Blanco S.	Matemática 3	Santillana
2	1984	2	Mercado, C.	Matemática 3º medio	Editorial Universitaria
3	1985	1	Aguayo, P. y Alonso I.	Descubriendo la Matemática III	Salesiana
4	1989	1	Carreño X. y Cruz X.	Matemática 3º medio	Arrayán
5	1993	1	Carreño X. y Cruz X.	Álgebra	Arrayán
6	1994	1	De las Heras R. – Blanco S. – Fuenzalida G. y Riveros J.	Matemática III	Santillana
7	1997	1	Riera G.	Matemática 2º medio	Zigzag

Tabla 3.3. Libros de texto Tercer Período (2001 - 2009)

	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	2001	1	Velásquez J. – Sepúlveda G. y Solabarrieta P.	Matemática III	Santillana
2	2002 2003	1	Bamón R. – González P. – Medina C. y Soto J.	Matemática 3° medio	Mare Nostrum
3	2003	1	Orellana J. – Ulloa M. y Zañartu, Mario	Matemática 3° medio	Arrayán
4	2004 2005	1	González P. y Soto J.	Matemática 3° medio	Mare Nostrum
5	2005	1	Guerra M, Urzúa P y Hernández R.	Matemática 3	Santillana
6	2006 2007	1	González P. –y Soto J.	Matemática 3° medio	Mare Nostrum
7	2009	1	Hojman R. – Yutronic J.	Matemática 3ª medio	Zigzag

Como se mencionó anteriormente, en este y en el tercer período aparecen libros de texto para la enseñanza media. Ya algunas editoriales existentes como Santillana o Zig Zag se atreven y publican textos para secundaria en Chile. Surgen otras nuevas como Cal y Canto o la llegada a nuestro país de la empresa española Mare Nostrum, por ejemplo, las que en los últimos años han desarrollado esta línea.

Se dispone según lo anterior, de la distribución de los 20 libros de texto como sigue:

Tabla 3.4. Distribución del libro de texto por período.

	Período (1969 – 1981)	Período (1969 – 1981)	Período (1969 – 1981)
Número de libros de texto analizados	6	7	7

Previamente al análisis que se detalla en los capítulos 5, 6 y 7, se ha realizado un análisis preliminar que ha tenido como propósito detectar los traslapes de información que se dan en las obras de un mismo autor, pero que corresponden a distintas ediciones o bien distintas obras. Por ejemplo, ocurre esto con: Mercado, Carreño y Cruz, González y Soto, en cuyos casos se hará la referencia completa para el primer libro de texto que se analice, y para los siguientes que presenten traslapes se abordará sólo los aspectos

distintivos que justifican que sean incorporados al estudio, para lo cual se dejará constancia explícita dentro de su análisis de contenido respectivo.

3.4. Plan de Análisis de los datos.

El plan de análisis de los datos que he elaborado por tratarse de una investigación en el marco cualitativo y de tipo descriptiva, contempla la aplicación de matrices definidas por campos genéricos que organizan la información que se extrae de cada fuente para examinarla en relación con los objetivos planteados en esta tesis. Se elaboraron matrices para las dos fuentes que proporcionan los datos, esto es, para los Programas Oficiales del Ministerio de Educación y para los libros de texto seleccionados.

Para validar estas matrices se realizaron las siguientes acciones:

1. Diseño de una primera versión del conjunto de matrices, aplicándolas a uno de los programas (el de tercero medio plan común del último período por ser el más completo en los detalles que presenta para la labor docente) y un libro de texto de cada período, de modo de producir un pilotaje que indicara la adecuación de los campos de cada matriz.
2. Una vez que se observó que los campos de las matrices de adecuaban a las fuentes, se envió a 12 expertos⁹ un archivo vía correo electrónico, con todas las matrices con las descripciones de sus respectivos campos para que en el plazo de 15 días corridos respondieran acerca de pertinencia de los campos, que le diera validez al instrumento.

⁹ Inicialmente se hizo un listado con más especialistas, de los cuales quedaron los 12 que previamente al ser consultados, indicaron su disponibilidad para responder en el plazo indicado. De ellos 7 respondieron.

Una vez realizadas estas acciones, se trabajó en las sugerencias de los cinco expertos que respondieron a la solicitud. En algunos casos, las matrices contienen campos que no se pueden describir o completar con alguna fuente puntual. Esto se ha indicado en el campo respectivo mediante la frase no hay información.

Las matrices se pueden clasificar en dos grandes tipos:

1. Matrices para la descripción y análisis de las fuentes: Aquellas cuyos campos permiten relatar, citar y comentar la información que trae la fuente (programa o texto). A su vez, según el tipo de información que organizan pueden ser Matrices de Identificación General (MIG) o bien Matrices de Análisis de Contenido (MAC).
2. Matrices de Resumen y Cotejo, las que se presentan al final de cada uno de los capítulos 4, 5, 6 y 7 cuyo propósito es objetivar y reducir la información de las matrices de descripción y análisis, de modo que sirvan para elaborar perfiles para el Saber a Enseñar, tanto a nivel Oficial (acto 2 de la transposición didáctica) como de los libros de texto (acto 3). Se volverá más adelante sobre esto.

He elaborado las Matrices de Identificación General (MIG), respondiendo a la caracterización estructural de la fuente, sin involucrarse en el contenido matemático aún, entre cuyos campos se encuentran: Año de publicación, edición y número de páginas entre otros. Ha sido necesario hacer dos matrices MIG específicas por el tipo de fuente que proporcionan datos de naturaleza distinta¹⁰: una para los programas oficiales que denotamos por MIGp y otra para los libros de texto que denotamos por MIGt.

Del mismo modo, las Matrices de Análisis de Contenido (MAC) también se han subdividido en MACp para los programas y con el mismo fin en MACt, aplicadas a los libros de texto. Estas matrices contienen la información referente a la Radicación como

¹⁰ Aunque los programas oficiales y los libros de texto están en el acto de la transposición didáctica que divulga el saber a enseñar, los primeros son de uso exclusivo del profesor, diferencia que nos llevó a separar en dos categorías a las matrices MIG.

también de su ecología, además de algunos campos más generales pero siempre referentes al contenido matemático que presenta.

Respecto del desarrollo del plan de análisis, éste tiene su lugar en el capítulo 4 referido al Saber a Enseñar oficial guiado por las Matrices de Identificación General (MIGp) y las Matrices de Análisis de Contenido de los Programas Oficiales (MACp). Los capítulos 5, 6 y 7, en tanto, referidos al Saber a Enseñar divulgado por los libros de texto, se trata mediante las Matrices de Identificación General (MIGt) y las Matrices de Análisis de Contenido (MACt).

Para levantar las conclusiones del trabajo de investigación, en el capítulo 8 se lleva a cabo el proceso de Triangulación entre el Saber matemático, el promulgado oficialmente por los programas ministeriales y el de los libros de textos, de los distintos períodos, de manera de evidenciar la existencia de rupturas epistemológicas del álgebra de radicales en los tres primeros actos de transposición didáctica y en los currículos de las últimas tres reformas, y a partir de ahí, de modo de dar respuesta a los de los objetivos planteados y a la contrastación con las hipótesis de esta investigación. En los siguientes apartados, se detallan los campos definidos para cada tipo de matriz, como también la operacionalización de la triangulación.

3.4.1. Matriz MIGp para la caracterización general de los programas oficiales.

Como he ha mencionado anteriormente, las matrices que organizan la información y que servirán para sistematizar el análisis de contenido son las siguientes:

Tabla 3.5. Matriz MIGp para la identificación general de los Programas Oficiales

Campos genéricos MIGp(i) con i = 1, 2, 3, 4, 5	Programa
MIGp1 Decreto.	
MIGp2 Características Generales de los Programas Oficiales.	
MIGp3 Programa Seleccionado y sus referencias identificatorias.	
MIGp4 Secciones del Programa.	
MIGp5 Referencias Bibliográficas del Programa.	

A continuación vamos a describir cada uno de los campos de esta matriz.

- **MIGp1 Decreto.**

Se rescata el Número del Decreto, su fecha de aparición en el Diario Oficial, algunos de los artículos de interés relacionados con la problemática de investigación y la implementación de los programas.

- **MIGp2 Características Generales de los Programas Oficiales.**

En este apartado se entrega información acerca de la concepción curricular base, los elementos que se enfatizan y organizan los programas.

- **MIGp3 Programa Seleccionado y sus referencias identificatorias.**

Se expone en este campo los programas que son examinados, junto a sus datos de identificación tales como año de publicación, edición, número de ejemplares, número de páginas.

- **MIGp4 Secciones del Programa.**

Este campo es completado con la información que ofrece el programa al mirarlo globalmente, tales como sugerencias metodológicas, organización del programa, objetivos o aprendizajes esperados, sugerencias evaluativos, entre otras. Esto permitirá observar el tipo de direccionamiento que se le da a los profesores para su tarea.

- **MIGp5 Referencias Bibliográficas del Programa.**

Importante resulta observar cuáles son las fuentes que recomiendan como institución oficial. Esto deja entrever el tipo de fuentes por una parte y la accesibilidad a ellas, como también consultarlas para ver si detrás del programa hay una concepción mecanicista, constructivista, conductista o formalista del aprendizaje. En este campo describiremos si tales referencias obedecen a ámbitos relacionados lo lúdico, con la divulgación científica (matemática), con el saber erudito, con libros de texto, a fin de observar si hay o no correspondencia entre los contenidos programáticos y la especificidad de la bibliografía, que proporcione instancias al docente de ampliar lo visto en el programa a favor de la planificación del tratamiento de los objetos matemáticos que debe enseñar, en particular de la radicación.

3.4.2. Matriz MACp para la caracterización del contenido matemático y del tratamiento del álgebra de radicales en los programas.

Se detalla a continuación los tres campos que conforman esta matriz, diseñada para organizar los datos y realizar el análisis descriptivo – interpretativo.

Tabla 3.6. Matriz MACp para la caracterización de los contenidos en Programas Oficiales y del tratamiento del Álgebra de Radicales

Campos genéricos MACp(i), con $i = 1, 2, 3$.	Programa
MACp1 Lugar Oficial de la Radicación en el Saber a Enseñar	
MACp2 Propósitos explicitados de los tópicos relacionados con los Radicales	
MACp3 Organización de los contenidos	
MACp4 Orientaciones explicitadas acerca de los radicales	
MACp5 Actividades o ejemplos propuestos	

A continuación vamos a describir algunos de los ítems de esta matriz:

- **MACp1 El lugar Oficial de la Radicación en el Saber a Enseñar.**

Se describe sucintamente el o los programas del o los niveles de enseñanza media en que los radicales son trabajados en el álgebra, obteniendo así una primera aproximación al contexto de las matemáticas escolares en que se ha transpuesto este saber.

- **MACp2 Propósitos explicitados de los tópicos relacionados con los radicales.**

En los programas existen distintos modos de referirse a los propósitos, los que entendemos aquí en genérico para abarcar lo que llaman objetivos (tanto generales como específicos), conductas deseables o en los programas actuales llamados aprendizajes esperados. Los que aquí se describen corresponden exclusivamente a los que tengan alguna relación con los radicales directamente o bien de modo indirecto, por ejemplo en la resolución de ecuaciones de segundo grado, donde interesa observar el tratamiento del concepto de raíz.

- **MACp3 Organización de los contenidos.**

Se describe en este campo, cómo se organizan los contenidos del nivel específico en que aparece el estudio de la Radicación, tanto los propios del álgebra de radicales (propiedades, demostraciones, actividades sugeridas y conexiones con otros objetos matemáticos), como de su ecología, en especial, las ecuaciones de segundo grado, ecuaciones con radicales u otros.

- **MACp4 Orientaciones explicitadas acerca de los radicales.**

Toda orientación relacionada con el tratamiento de los radicales que permita extraer alguna conclusión, la describiremos en este campo, incluyendo las relacionadas con el concepto de raíz que traigan.

- **MACp5 Actividades o ejemplos propuestos.**

Cada una de las actividades desarrolladas o propuestas será objeto de análisis. Se procede a su resolución en caso que ésta no aparezca, lo que informa sobre los conocimientos previos y concepciones que se tiene de los radicales y las raíces, manejo de sus dominios de validez, discusión y pertinencia de lo obtenido, y en general lo que genéricamente hemos llamado “tratamiento”.

3.4.3. Matriz MIGt para la caracterización general de los libros de texto.

Cada libro de texto seleccionado para su análisis, será sometido al examen de los siguientes datos, para lograr una caracterización general.

Tabla 3.7. Matriz MIGt para la caracterización de la Identificación General del libro de texto

Campos genéricos MIGt(i), con $i = 1, 2, 3, 4$.	Libro de texto
MIGt1: Título y Procedencia	
MIGt2: Datos de Autoría	
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	
MIGt4: Presentación física	

A continuación vamos a describir algunos de los ítems de esta matriz:

- **MIGt1: Título, Procedencia.**

Corresponde al nombre del libro de texto y su localización de origen, si es nacional o extranjero. Para el caso de los nacionales, se indica además si es distribuido por el Ministerio de Educación.

A pesar que se ha intentado realizar el análisis sobre libros de texto hechos en Chile, se ha optado por incorporar algunas obras extranjeras, que por un lado han sido también muy utilizados por los docentes, al punto de catalogarse como clásicos, al ser empleados por varias generaciones de estudiantes y profesores. Al mismo tiempo, es

probable que por la misma situación descrita, hayan influenciado a más de algún autor de los que doy cuenta de su trabajo en esta tesis.

• **MIGt2: Datos de Autoría.**

En esta dimensión se describe los estudios de los autores y sus respectivas instituciones de formación, otras obras en que ha participado.

• **MIGt3: Edición y tipo de obra.**

Se detalla editorial y su relevancia, algunos antecedentes sobre la editorial, número de edición consultada, año de la primera edición y lugar. En cuanto a tipo de obra, se refiere a determinar si el texto está dirigido a algún nivel en particular o bien si es un material de apoyo o compendio. Se refiere a si es un texto de álgebra, de matemáticas generales, de algún nivel en particular, etc. Incluye su prólogo si procede y además se informa si acaso tiene versión electrónica (CD, Internet), si ofrece “links” (y si están vigentes).

• **MIGt4: Presentación física.**

Se informa aquí del Número de páginas, características de la impresión (color o blanco y negro), tamaño de las hojas.

3.4.4. Matriz MACt para la caracterización del contenido matemático y del tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto.

Cada libro de texto seleccionado para su análisis, será sometido a la siguiente matriz, para dar la descripción del documento y seguida de comentarios que ayuden a caracterizar el tratamiento de los contenidos que expone en relación a la Radicación y su ecología. Los campos se denominarán genéricamente por MACt acompañados de un ordinal. Se definieron en total seis campos en el diseño de esta matriz, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 3.8. Matriz MACt para la caracterización del contenido matemático del libro de texto.

Campos genéricos MACt(i) con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$	Libro de texto
MACt1: Organización de los contenidos	
MACt2: Tipo de Presentación de los contenidos	
MACt3: Ecología de los radicales en el libro de texto	
MACt4: Presentación de los radicales.	
MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.	
MACt6: Aplicaciones del álgebra de radicales.	

Se explica a continuación cada uno de los campos MACt(i):

• **MACt1: Organización de los contenidos.**

Se presenta la secuenciación general de todos los contenidos del libro de texto, existencia de bloques, capítulos, secciones, de modo de obtener una visión que permita interpretar la obra en términos de la articulación y organización de la matemática escolar y ser comparable con otras.

• **MACt2: Tipo de Presentación.**

Para el desarrollo de este campo, consideraremos seis tipos de presentación en forma de par ordenado (estructura, actividades). La componente “estructura” puede tomar uno los siguientes valores excluyentes:

- Axiomática (A): Es aquella que comienza dando las definiciones y propiedades, seguida de ejemplos y ejercicios, entregando un conocimiento impuesto y que no da espacio para construcción alguna por el estudiante.
- Constructiva incompleta (CI): Comienza mediante la descripción de una situación (matemática o no) que llevará supuestamente a los lectores a generar un protoconcepto, pero que no evidencia institucionalización del saber trabajado.
- Constructiva completa (CC): Comienza mediante la descripción de una situación (matemática o no) que llevará supuestamente a los lectores a generar un protoconcepto, incorporando la institucionalización.

La segunda componente, que hemos denominado “actividades”, toma uno y sólo uno de los siguientes valores:

- Mecanicista (M): Enfatiza en actividades de repetición con gran número de ejercicios (sobre 10).
- Heurística (H): La mayor parte de las actividades propuestas se cimientan en la resolución de problemas.

De este modo, con las combinaciones posibles, se obtienen las 6 parejas: (A, M), (A, H), (CI, M), (CI, H), (CC, I), (CC, H), que caracterizan así el tipo de presentación de los contenidos del libro de texto.

En algunos casos, se evidenció la presencia de más de uno de estos valores, de modo que en el comentario respectivo se indica tal situación, dejándose el tipo de presentación en la categoría que presente mayor posicionamiento.

• **MACt3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

En este campo se describe en qué capítulos, unidades o lecciones se encuentran los radicales y las diferentes articulaciones con otros conceptos o contenidos, como por ejemplo, el teorema de Pitágoras, la resolución de ecuaciones cuadráticas, etc. El propósito de esta descripción es tomar una primera fotografía respecto de los usos de los radicales, los énfasis en los procedimientos que los involucran, como los contextos en que aparecen (contextos numéricos, algebraicos, geométricos). Cabe indicar que la diferencia de este campo respecto a MACt1, en la profundización, pues aquí se analizará en específico todos los contenidos en que aparecen los radicales. La mirada en MACt1 es general.

• **MACt4: Presentación de los Radicales.**

Interesa conocer cómo son introducidos los conceptos de raíz y de radical, saber si ambos conceptos aparecen o sólo uno de estos, cómo los define, si los relaciona. Se describe lo que trae el libro de texto seguido del análisis para interpretar cómo el autor

concebe estos conceptos. Observar si la institucionalización conecta con el valor absoluto, con potencias, u otro conocimiento supuesto como previo. Además si hace énfasis o no en el error conceptual del doble signo al usar el signo radical y las “convenciones” que muestra.

Otro elemento a considerar en este campo es la presentación explícita o no de la expresión $\sqrt[n]{0}$, si utiliza radicales en ámbito de positivos o números no negativos.

• **MACT5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

Este campo constituye el de mayor detalle (y por tanto extensión) junto al siguiente (MACT6), pues se accede a través de ellos al núcleo de esta tesis. Se describirá cada punto relacionado con el tratamiento de las propiedades, observando:

- Cuáles son las propiedades que enuncia y su secuencia. Ésta última viene dada por un diagrama que incluiremos para revelar la dependencia lógica de unos teoremas respecto de otros, si la ofrece el texto y analizar esta dependencia con la de orden formal.
- Uso de restricciones o explicitación de los campos de validez de cada propiedad.
- Pertinencia de las demostraciones que desarrolle desde el punto de vista lógico.
- Notaciones o representaciones semióticas utilizadas.
- Tipos de tareas asignadas (en relación a las verificaciones o usos de las propiedades, contextos numéricos para inferir si en las tareas se induce a algún tipo de error conceptual o procedimental).

Por ejemplo, describir y comentar el contexto en el que aparezca (si es el caso) del error lógico en la demostración de la propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ para $a \geq 0, b \geq 0$ utilizando la notación en potencias de los radicales, error cometido al cambiar de notación justificando el cumplimiento de la propiedad en términos de la propiedad de

potencias $a^p \cdot b^p = (ab)^p$ que sólo en la matemática escolar ha sido probado para exponentes enteros.

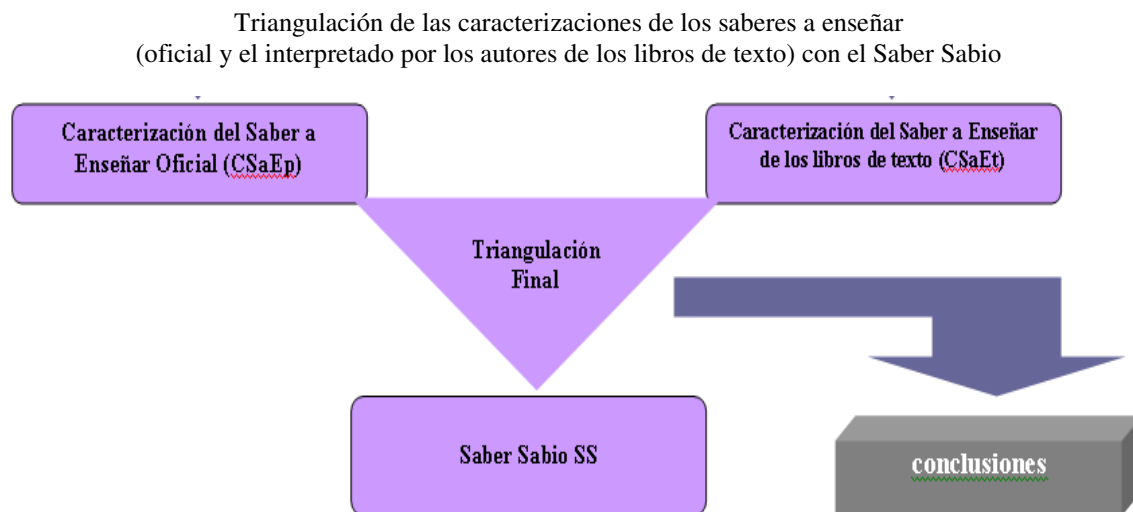
- **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Frecuentemente se encuentran otros objetos matemáticos en que los radicales sólo son utilizados como herramienta o medio. Es el caso de las ecuaciones cuadráticas y sus métodos de resolución, los procedimientos de racionalización de denominadores o las ecuaciones que contienen radicales con incógnitas en su interior. Hay otros temas que históricamente le están asociados al objeto Radical, como es el caso de la irracionalidad numérica, pero que no siempre aparece ligado en el mismo volumen de un libro de texto. Describimos el comportamiento de la radicación en estos otros contenidos, también para indagar sobre posibles incoherencias o errores conceptuales e incluso procedimentales que se puedan detectar. Entre estos, por ejemplo, examinar las ecuaciones con la incógnita en algún radicando, (llamadas irracionales, por cierto nombre poco feliz y más aún que presta a la confusión o a oscurecer el concepto de irracional) observando las justificaciones (si las da) del proceso de resolución respecto de las transformaciones algebraicas no reversibles, (distinto de lo que los estudiantes vienen acostumbrados con las ecuaciones simples en x de primer grado). En estas ecuaciones algunos textos pueden proponer resolver y no verificar la solución o simplemente no analizar las condiciones de entrada que hacen imposible en \mathbb{R} , obtener un valor para x en $\sqrt{x} = -2$, aplicación que está directamente ligada con el concepto de radical dado en el libro de texto.

3.4.5. Matrices de Resumen y Cotejo. Caracterizaciones y Perfiles.

A partir de la información obtenida al aplicar las matrices MIGp, MACp, MIGt y MACt, es necesario establecer las caracterizaciones de los Saberes a Enseñar para efectos de una triangulación final de la cual extraer conclusiones en relación a los objetivos planteados y la aceptación o refutación de las hipótesis de investigación.

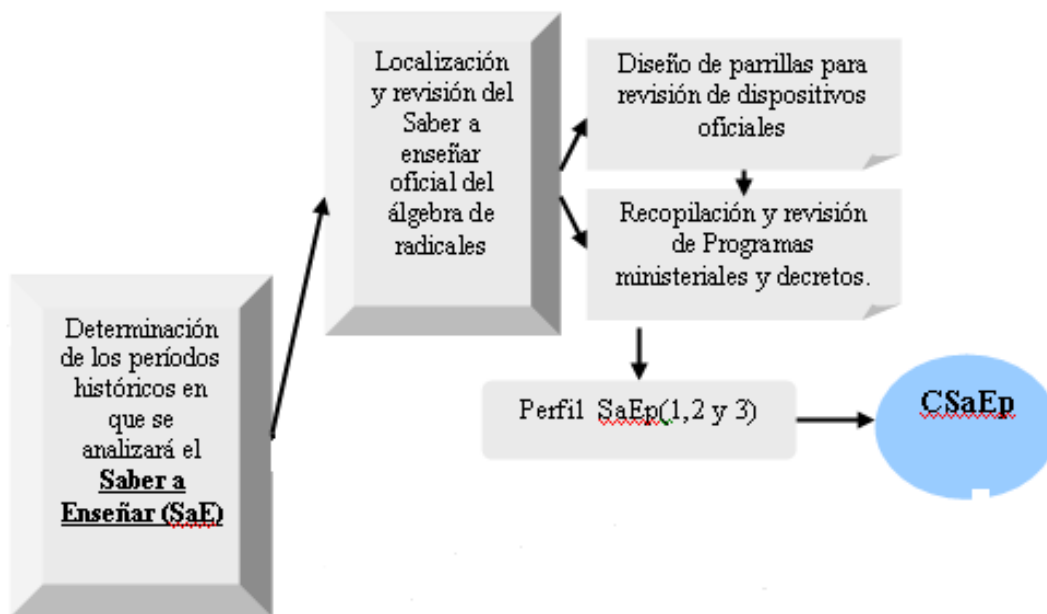
Hablamos de construir dos caracterizaciones respectivamente correspondientes a los saberes a enseñar oficial y de los libros de texto (según los actos 2 y 3 de la Teoría de la Transposición Didáctica). La primera la simbolizamos por CSaEp (Caracterización del Saber a Enseñar según los programas ministeriales) y la segunda por CSaEt (Caracterización del Saber a Enseñar según los libros de texto), las que serán trianguladas con el Saber Sabio (SS) para dar origen a las conclusiones finales¹¹, como se muestra en el siguiente esquema:



La caracterización CSaEp proviene de la triangulación de lo que hemos llamado Perfil de cada uno de los tres programas ministeriales, simbolizado por las expresiones

¹¹ Ver Capítulo 8.

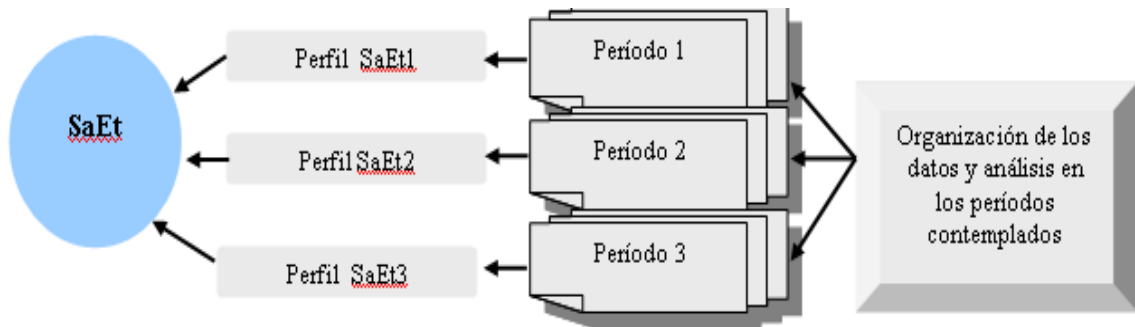
SaEp1, SaEp2 y SaEp3, en que las siglas SaEp significan “Saber a Enseñar según los programas”, acompañado del ordinal 1, 2 o 3 según sea el período de vigencia de tal documento¹².



La caracterización CSaEt se construye desde la triangulación de los tres perfiles SaEt1, SaEt2 y SaEt3. Simbólicamente representan lo mismo que los perfiles anteriores, cambiando p por t, para mostrar que el Saber a Enseñar involucrado es el que han interpretado los libros de texto. Como cada perfil se establecerá como un representante del conjunto de libros de texto de un mismo período, creamos campos para compararlos y resumir la información recogida y examinada en las matrices tipo MIG y MAC. Se da paso de este modo, a la Matriz de Resumen y Cotejo contiene descriptores específicos para objetivar la información y hacerla comparable, y establecer así los perfiles deseados, de modo que por ejemplo, SaEt1, sea el perfil de los libros de texto del primer período.

¹² Como sólo son 3 programas oficiales, cada perfil representa a cada período de estudio.

Determinación del Perfil SaEt desde la Organización de los datos y su análisis por Períodos.



Operativamente, el perfil de los programas o bien perfil de los libros de texto que comparten el mismo período, queda determinado en la matriz de resumen (Mr) **mediante los descriptores puntuales que hemos llamado campos, aspectos y sub – aspectos**. Se utilizan estos tres descriptores según sea el grado de especificidad necesaria. Por ejemplo, se definió un campo llamado “Vigencia de la fuente”, la cual se refiere a los años de uso del programa o del libro de texto. No requiere más que anotar en la celda respectiva de la matriz, los dos últimos dígitos de los años en cuestión. Sin embargo, hay otros campos que desglosamos en aspectos, como el caso del campo “Introducción al concepto”, el que se clarifica por medio de cuatro aspectos que brindan la información relevante para el perfil. De igual forma, algunos campos requieren de un detalle aún mayor, creando una tercera componente descriptiva, donde un campo determinado se compone de aspectos y éstos a su vez de sub – aspectos. Como se trata de una matriz de resumen y cotejo, se marca en estos aspectos o sub – aspectos con x en la celda de la descripción respectiva, por lo que la concentración de mayor cantidad de x en las filas permitirá identificar un representante (modal) y por tanto la tendencia del descriptor para la caracterización del perfil. Al respecto, aclaro dos posibles situaciones que pueden ocurrir:

- i) Si el **descriptor no aparece en la fuente** examinada, se ha decidido colocar NI (abreviando que no hay información) en la celda que corresponda.
- ii) Si la **información corresponde a la negación** del descriptor, y no existe otro en la matriz que lo represente, se opta por dejar en blanco el casillero respectivo.

Los descriptores de la matriz de resumen y cotejo han sido simbolizados por **Mr(i,j)**, donde i es el ordinal que indica el campo y j el ordinal genérico de sus aspectos. Como ya se mencionó antes, existen campos desglosados en aspectos y éstos en sub - aspectos, lo que hace necesario ampliar en tal caso la notación anterior utilizando un tercer ordinal k, quedando la descripción puntual determinada por la terna ordenada entre campo, aspecto y sub – aspecto como Mr(i, j, k) que aparece en estas matrices como la numeración tipo i.j.k. Así, por ejemplo, la abreviación Mr(1) hace referencia (como se aprecia en la matriz siguiente), al descriptor “Vigencia de la fuente”, (sólo de campo) la que no se subdivide en partes. Sí lo hacen los descriptores 3 al 5 (campos i más aspectos j) y los descriptores 6 y 7, que incluyen la terna campos, aspectos y sub – aspectos, i.j.k.

Tabla 3.9. Matriz de Resumen y cotejo para los programas ministeriales.

Campos, aspectos y sub – aspectos		Períodos (1,2,3)		
		Prog 1	Prog 2	Prog 3
1. Vigencia de la fuente				
2. Nivel de enseñanza media				
3. Uso del signo radical	3.1 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama raíces			
	3.2 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama radicales			
	3.3 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama irracionales			
	3.4 Comete el error del doble signo (por ejemplo, $\sqrt{4} = \pm 2$)			
	3.5 Lo usa con restricciones sólo para el radicando (dominio)			
	3.6 Lo usa con restricciones de dominio y recorrido			
4. Introducción al concepto	4.1 Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)			
	4.2 Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)			
	4.3 Como inversa de la potenciación			
	4.4 Como potencia de exponente fraccionario (o racional)			
	4.5 Otro (especificar al final de la parrilla)			
5. Tipos de representaciones que utiliza	5.1 Con el signo radical			
	5.2 Con uso de valor absoluto			
	5.3 Con notación de potencia (exp. fraccionario)			
	5.4 Notación funcional			
	5.5 Otro (especificar a continuación de la parrilla)			

6. Propiedades de los radicales	6.1 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	6.1.1 La demostración con errores lógicos			
		6.1.2 La demostración correctamente			
		6.1.3 No demostración			
		6.1.4 Usa restricciones completas			
		6.1.5 Usa restricciones incompletas			
		6.1.6 No restringe			
		6.1.7 Define unilateralmente			
		6.1.8 Define bilateralmente			
	6.2 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	6.2.1 La demostración con errores lógicos			
		6.2.2 La demostración correctamente			
		6.2.3 No demostración			
		6.2.4 Usa restricciones completas			
		6.2.5 Usa restricciones incompletas			
		6.2.6 No restringe			
		6.2.7 Define unilateralmente			
		6.2.8 Define bilateralmente			
	6.3 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	6.3.1 La demostración con errores lógicos			
		6.3.2 La demostración correctamente			
		6.3.3 No demostración			
		6.3.4 Usa restricciones completas			
		6.3.5 Usa restricciones incompletas			
		6.3.6 No restringe			
		6.3.7 Define unilateralmente			
		6.3.8 Define bilateralmente			
	6.4 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$	6.4.1 La demostración con errores lógicos			
		6.4.2 La demostración correctamente			
		6.4.3 No demostración			
		6.4.4 Usa restricciones completas			
		6.4.5 Usa restricciones incompletas			
		6.4.6 No restringe			
		6.4.7 Define unilateralmente			
		6.4.8 Define bilateralmente			
6.5 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$	6.5.1 La demostración con errores lógicos				
	6.5.2 La demostración correctamente				
	6.5.3 No demostración				
	6.5.4 Usa restricciones completas				
	6.5.5 Usa restricciones incompletas				
	6.5.6 No restringe				
	6.5.7 Define unilateralmente				
	6.5.8 Define bilateralmente				

	$6.6 \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	6.6.1 La demuestra con errores lógicos			
		6.6.2 La demuestra correctamente			
		6.6.3 No demuestra			
		6.6.4 Usa restricciones completas			
		6.6.5 Usa restricciones incompletas			
		6.6.6 No restringe			
		6.6.7 Define unilateralmente			
		6.6.8 Define bilateralmente			
	$6.7 \sqrt[n]{a^n} = a$	6.7.1 La demuestra con errores lógicos			
		6.7.2 La demuestra correctamente			
		6.7.3 No demuestra			
		6.7.4 Usa restricciones completas			
		6.7.5 Usa restricciones incompletas			
		6.7.6 No restringe			
		6.7.7 Define unilateralmente			
		6.7.8 Define bilateralmente			
	$6.8 (\sqrt[n]{a})^n = a$	6.8.1 La demuestra con errores lógicos			
		6.8.2 La demuestra correctamente			
		6.8.3 No demuestra			
		6.8.4 Usa restricciones completas			
		6.8.5 Usa restricciones incompletas			
		6.8.6 No restringe			
		6.8.7 Define unilateralmente			
		6.8.8 Define bilateralmente			
	$6.9 a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	6.9.1 La demuestra con errores lógicos			
		6.9.2 La demuestra correctamente			
		6.9.3 No demuestra			
		6.9.4 Usa restricciones completas			
		6.9.5 Usa restricciones incompletas			
		6.9.6 No restringe			
		6.9.7 Define unilateralmente			
		6.9.8 Define bilateralmente			
7. Aplicaciones de los radicales	7.1 Racionalización	7.1.1 Sólo de denominadores			
		7.1.2 De numeradores y denominadores			
		7.1.3 Restringe			
	7.2 Ecuaciones cuadráticas	7.2.1 Conduce al error $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a} = \pm b$			
		7.2.2 Establece correctamente que $x^2 = a$, entonces, $x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$			
		7.2.3 Restringe			

7.3 Ecuaciones con radicales	7.3.1 Explica sobre transformaciones algebraicas no equivalentes			
	7.3.2 Comprueba las soluciones y selecciona sólo las que corresponden			
	7.3.3 Comprueba las soluciones y las separa en soluciones y soluciones ajenas			
	7.3.4 Estudia las restricciones antes de resolver			
7.4 Números Complejos	7.4.1 Trasciende el error del doble signo			
	7.4.2 Admite la notación con el radical sólo para la raíz real no negativa			
7.5 Teorema de Pitágoras				
7.6 Irracionalidad				

Tabla 3.10. Matriz de Resumen y cotejo de los Libros de Texto que se aplicará a cada período MRt

Campos, aspectos y sub – aspectos		Período (1, 2 , 3)						
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Libro 5	Libro 6	Libro 7
1. Vigencia de la fuente								
2. Nivel de enseñanza media								
3. Uso del signo radical	1.1 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama raíces							
	2.2 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama radicales							
	3.3 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama irracionales							
	3.4 Comete el error del doble signo (por ejemplo, $\sqrt{4} = \pm 2$)							
	3.5 Lo usa con restricciones sólo para el radicando (dominio)							
	3.6 Lo usa con restricciones de dominio y recorrido							
4. Introducción al concepto	4.1 Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)							
	4.2 Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)							
	4.3 Como inversa de la potenciación							
	4.4 Como potencia de exponente fraccionario (o racional)							
	4.5 Otro (especificar al final de la parrilla)							
5. Tipos de representaciones que utiliza	5.1 Con el signo radical							
	5.2 Con uso de valor absoluto							
	5.3 Con notación de potencia (exp. fraccionario)							
	5.4 Notación funcional							
	5.5 Otro (especificar a continuación de la parrilla)							

6. Propiedades de los radicales	6.1 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	6.1.1 La muestra con errores lógicos													
		6.1.2 La muestra correctamente													
		6.1.3 No muestra													
		6.1.4 Usa restricciones completas													
		6.1.5 Usa restricciones incompletas													
		6.1.6 No restringe													
		6.1.7 Define unilateralmente													
		6.1.8 Define bilateralmente													
	6.2 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	6.2.1 La muestra con errores lógicos													
		6.2.2 La muestra correctamente													
		6.2.3 No muestra													
		6.2.4 Usa restricciones completas													
		6.2.5 Usa restricciones incompletas													
		6.2.6 No restringe													
		6.2.7 Define unilateralmente													
		6.2.8 Define bilateralmente													
	6.3 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	6.3.1 La muestra con errores lógicos													
		6.3.2 La muestra correctamente													
		6.3.3 No muestra													
		6.3.4 Usa restricciones completas													
		6.3.5 Usa restricciones incompletas													
		6.3.6 No restringe													
		6.3.7 Define unilateralmente													
		6.3.8 Define bilateralmente													
	6.4 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$	6.4.1 La muestra con errores lógicos													
		6.4.2 La muestra correctamente													
		6.4.3 No muestra													
		6.4.4 Usa restricciones completas													
		6.4.5 Usa restricciones incompletas													
		6.4.6 No restringe													
		6.4.7 Define unilateralmente													
		6.4.8 Define bilateralmente													
	6.5 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$	6.5.1 La muestra con errores lógicos													
		6.5.2 La muestra correctamente													
		6.5.3 No muestra													
		6.5.4 Usa restricciones completas													
		6.5.5 Usa restricciones incompletas													
		6.5.6 No restringe													
		6.5.7 Define unilateralmente													
		6.5.8 Define bilateralmente													
	6.6 $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	6.6.1 La muestra con errores lógicos													
		6.6.2 La muestra correctamente													

7.4 Números Complejos	7.4.1 Trasciende el error del doble signo								
	7.4.2 Admite la notación con el radical sólo para la raíz real no negativa								
7.5 Teorema de Pitágoras									
7.6 Irracionalidad									

Vemos a continuación qué se entiende por cada descriptor, sea campo, aspecto o sub –aspecto.

A. Campos. (Formato numérico i).

- Mr(1) Vigencia de la fuente: Se anotan los dos últimos dígitos de los años en que la fuente (programa o libro de texto) es utilizada en el sistema escolar. Por ejemplo, si abarca de 1996 a 2009 se anota 96 y bajo este número se escribe 09.
- Mr(2) Nivel de enseñanza media: Se anotará el nivel al que pertenece la fuente (en caso que corresponda) en términos ordinales, como de costumbre; 1º, 2º, 3º, 4º, para el primero, segundo, tercero o cuarto año de enseñanza media, respectivamente.

B. Campos y sus respectivos aspectos, formato numérico i.j.

- Mr(3.j) Uso del signo radical: Este campo presenta 6 aspectos ($1 \leq j \leq 6$). Estos son:
 - 1 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama raíces.
 - 2 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama radicales.
 - 3 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama irracionales.

En estas el objetivo es precisar la concepción que se da en la fuente, respecto a cómo denomina a los objetos que representa con este signo.

Además, los otros tres aspectos:

- 4 Comete el error del doble signo.
- 5 Lo usa con restricciones sólo para el radicando (dominio).
- 6 Lo usa con restricciones de dominio y recorrido.

Están destinados a resumir la explicitación de los dominios de validez cuando se utiliza el signo radical, en especial si indica que los radicales de orden par definen en los números reales no negativos, tanto para el radicando como para el número expresado por $\sqrt[n]{a}$, para n natural (aspectos 5 y 6) o bien si índice al error conceptual tipo $\sqrt[n]{a} = \pm b$, (aspecto 4).

- Mr(4,j) Introducción al concepto: Se desglosa en cinco aspectos:
 - 1. Deductiva (del n-ésimo al cuadrado).
 - 2. Inductiva (del cuadrado al n-ésimo).
 - 3. Como inversa de la potenciación.
 - 4. Como potencia de exponente fraccionario (o racional).
 - 5. Otro (especificar al final de la matriz).

Los dos primeros apuntan al modo en que se presentan los radicales, si parte del radical enésimo y luego sus casos particulares (cuadrados, cúbicos, etc.) o bien al revés. Los aspectos 3 y 4, muestran los conocimientos previos en que ancla el nuevo objeto matemático “radical”, que corresponden a los más conocidos, como inversa de la potenciación, mostrando que por ejemplo, $\sqrt{4}$ corresponde al número cuyo cuadrado es 4 o como potencia de exponente fraccionario, esto es, partiendo del significado que atribuye a las expresiones de la forma $a^{\frac{p}{q}}$, que por medio de transformaciones algebraicas conduce a la notación radical $\sqrt[q]{a^p}$, con las respectivas restricciones para a, p y q . Se ha dejado una quinta posibilidad (aspecto 5), por si se obtiene otra introducción distinta no contemplada aquí.

- Mr(5.j) Tipos de representación que utiliza: Este campo lo forman 5 aspectos.
 - 1 Con el signo radical: se refiere al uso explícito de $\sqrt{\quad}$.
 - 2 Con uso de valor absoluto: incorpora la notación en valor absoluto en tratamientos como por ejemplo: $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$. También será completado con x este aspecto, si en lugar del valor absoluto, menciona que los literales los restringe a los números positivos (o no negativos).
 - 3 Con notación de potencia (exp. fraccionario): usa de las expresiones $a^{\frac{p}{q}}$.
 - 4 Notación funcional: emplea la notación funcional $f(x) = \sqrt[n]{x}$ y su tratamiento como tal.
 - 5 Otro (especificar a continuación de la matriz): aspecto que se incorpora para casos no previstos en las categorías anteriores. Por tal motivo se marca en tal caso con x, indicando el detalle al final de la matriz.

- Mr(6.j.k) Propiedades de los radicales: Se chequea la presencia de las propiedades siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k} & 2. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} & 3. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[kn]{a^k b^n} \\
 4. \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b} & 5. \sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[kn]{a^k : b^n} & 6. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a} \\
 7. \sqrt[n]{a^n} = a & 8. (\sqrt[n]{a})^n = a & 9. a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}
 \end{array}$$

Para cada una (tomada como aspecto, en la estructura de la matriz) se definieron 8 sub - aspectos para detallar su tratamiento en relación a lo que interesa observar en esta tesis:

1. La demuestra con errores lógicos: Se refiere a errores cometidos al emplear teoremas que no han sido demostrados previamente. El caso que mejor ilustra este hecho, es el de la prueba de algunas propiedades de los radicales cambiando la notación a la forma de potencia de exponente fraccionario y concluir que la propiedad para radicales es válida, basándose en propiedades de potencias. Se ha denominado error

lógico a este sub-aspecto, pues las propiedades de potencias a las que hace referencia se han tratado en cursos anteriores a lo más para exponentes enteros.

2. **La demuestra correctamente:** La demostración que aparece o sugiere es lógicamente aceptable.

3. **No demuestra:** Sólo enuncia la propiedad, la verifica o no, pero no hay referencia a la demostración.

4. **Usa restricciones completas:** Al enunciar la propiedad, indica el ámbito numérico para cada una de las variables que la componen, en que es válida.

5. **Usa restricciones incompletas:** Al enunciar la propiedad, da restricciones sólo para algunas de las variables, omitiendo otras.

6. **No restringe:** La propiedad es sólo enunciada sin indicar contexto numérico de sus variables.

7. **Define unilateralmente:** La propiedad se presenta en el sentido izquierda a derecha y es tratada de este modo. El signo igual es considerado como “resultado de”. El tratamiento de una misma propiedad se divulga como si fueran dos propiedades distintas, como ocurre cuando se presentan: “la multiplicación de radicales de igual orden (o igual índice)” y “radical de un producto”.

8. **Define bilateralmente:** El signo igual se emplea como relación de equivalencia, haciendo notar que se trabaja “de ida y vuelta”, como permite la simetría de la relación de igualdad. En este tratamiento, se enuncia sólo la propiedad de multiplicación de radicales de igual orden y permite la descomposición sin necesidad de hacer aparecer otra propiedad.

- Mr(7.j.k) Aplicaciones de los radicales: En este campo se resumen los contenidos en que se utiliza el álgebra de radicales. Los aspectos (en términos de contenidos) que se definieron son:

1. Racionalización, en que interesa chequear cuatro sub – aspectos:

1. Sólo de denominadores.
2. De numeradores y denominadores.
3. Restringe.

En el primero, se informa que la fuente divulga que el proceso es aplicable sólo a los denominadores, siendo que como técnica, también es válida para numeradores, en efecto aplicable en el cálculo algebraico de algunos límites de funciones. Las fuentes que son marcadas en el sub – aspecto 2, comprenden completamente esta técnica.

El sub – aspecto 3, indica la existencia de restricciones para las variables involucradas en las expresiones que se presentan en el desarrollo de la racionalización.

2. Ecuaciones cuadráticas. Se observa este contenido en tres sub-aspectos:

- 1. **Conduce al error** $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a} = \pm b$: que significa que aplica el signo radical pero de él extrae las dos soluciones, sin diferenciar entre \sqrt{a} y $-\sqrt{a}$. La otra posibilidad es la que indica el siguiente sub – aspecto.

- 2. **Establece correctamente** que $x^2 = a$, entonces, $x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$

Además se examina el sub – aspecto.

- 3. **Restringe**, que se marca en caso que al usar literales, indique las condiciones para el trabajo con números reales.

3. Ecuaciones con radicales: En este aspecto se definen 4 sub – aspectos, los cuales son:

- 1. **Explica sobre transformaciones** algebraicas no equivalentes, por ejemplo, el fundamento del proceso habitual de resolución de este tipo de ecuaciones, en que “elevan cada miembro de la ecuación al índice del radical...”, pasaje que en términos de la lógica proposicional es una condición necesaria pero no suficiente.

- 2. **Comprueba las soluciones** y selecciona sólo las que corresponden. Una vez que verifica las soluciones obtenidas, explicita cuál es y cuál no, sin mencionar que hay soluciones extrañas o con otros nombres, que no satisfacen la ecuación dada.

- 3. **Comprueba las soluciones** y las separa en soluciones y soluciones ajenas. En efecto, algunos autores en una revisión previa para diseñar la matriz de resumen y cotejo, no dejan claro que las soluciones ajenas NO son soluciones de la ecuación, otros las denominan extrañas, pero no enfatizan que son soluciones de OTRA ecuación no equivalente a la original. En tal caso se marca la casilla correspondiente.

- 4. **Estudia las restricciones** antes de resolver. Se marca la celda de este sub – aspecto en caso que antes de resolver la o las ecuaciones propuestas, analiza los dominios y recorridos de las funciones involucradas, o al menos da lugar a ello. Por ejemplo, si la ecuación planteada es $\sqrt{x+1} = -2$, expone que no tiene solución en IR, dado que el radical es siempre un número real no negativo.

4. Números Complejos: Sólo dos sub – aspectos se cotejan aquí:

- 1. Trasciende el error del doble signo, por ejemplo, aparecen desarrollos como $\sqrt{-4} = \pm 2i$ o similares que lleven a reproducir el error del doble signo en el cuerpo de los números complejos, o bien de modo contrario y correcto, por cierto.

- 2. Admite la notación con el radical sólo para la raíz real no negativa

Los dos aspectos finales: 5. Teorema de Pitágoras y 6. Irracionalidad, se marcan en sólo en caso de estar presentes en la ecología de los radicales en la fuente. No hay otro interés en particular, ya que el nudo de análisis está en el tratamiento algebraico y no en el ámbito aritmético.

3.4.6. Triangulaciones y Obtención de conclusiones.

La matriz M_r aparece al final de haber examinado los programas o libros de texto del período respectivo, y por tanto, se retoman como parte de la síntesis de los capítulos 4 al 7, dando así una caracterización del saber a enseñar oficial o bien el promulgado por los libros de texto.

De este modo, se llega al capítulo 8 llamado “Triangulaciones”, para confrontar la información y los análisis realizados de la siguiente manera:

- Primero se efectúa la triangulación entre los programas de los 3 períodos, logrando así construir un Saber a Enseñar que represente la caracterización del saber oficial a enseñar que designamos por CSaEp.
- Segundo se procede a la triangulación de los saberes a enseñar de los libros de texto entregados al final de los capítulos 5, 6 y 7, obteniendo su caracterización que simbolizamos por CSaEt.
- Tercero, hacemos la triangulación entre SaEp, SaEt y el Saber Sabio SS, lo que lleva a las conclusiones finales de acuerdo a los objetivos e hipótesis de investigación, en relación a su cumplimiento o refutación.

Los perfiles y las caracterizaciones para las triangulaciones se harán en relación a la siguiente tabla, que orienta el proceso de análisis de los datos al relacionarlos con los objetivos específicos planteados en la sección 1.3.

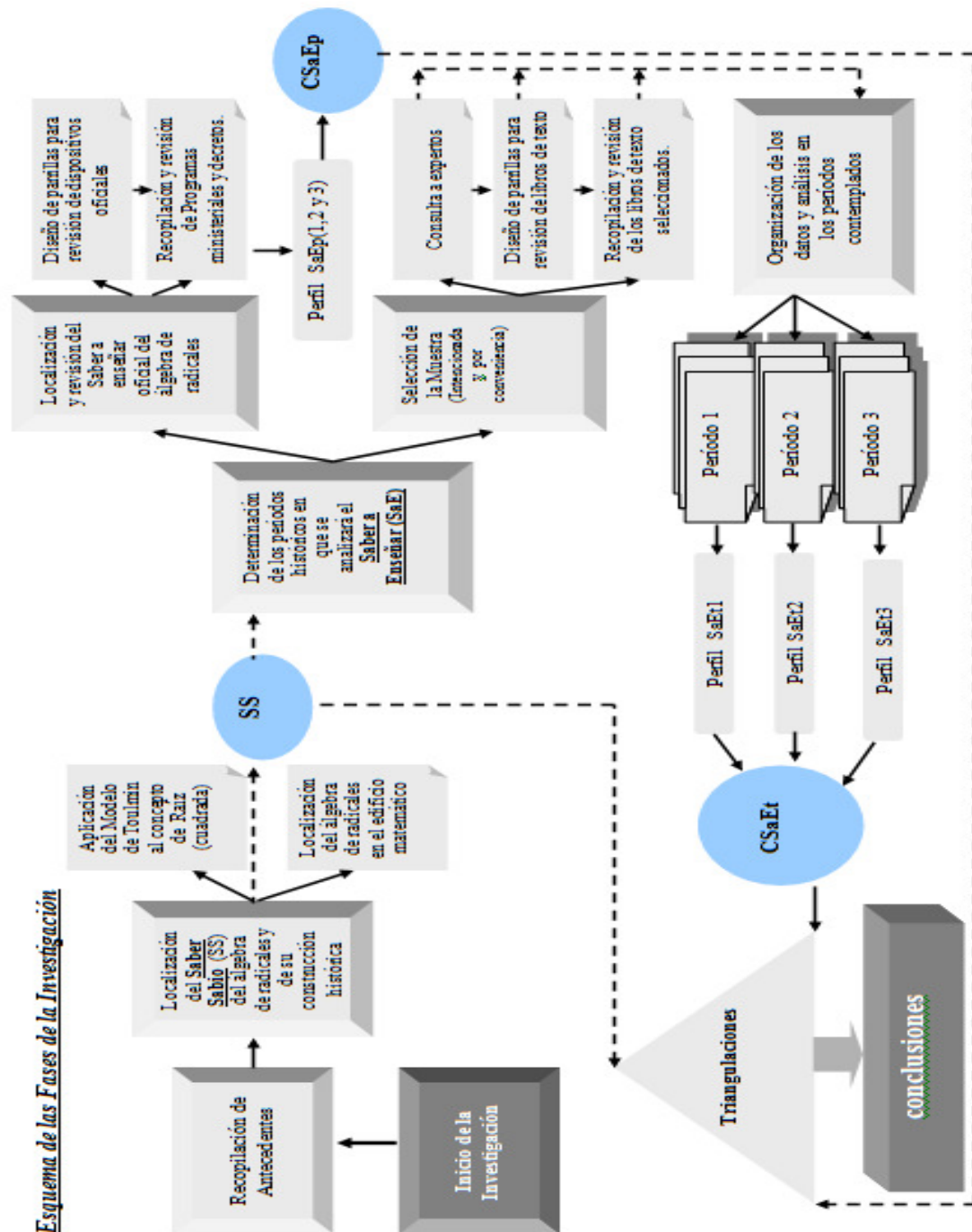
Tabla 3.11.

Articulación entre los campos de las matrices de recogida de información, las matrices de resumen y los objetivos de la investigación

Campos de las matrices MIGp, MIGt, MACp y MACt	Campos de la matriz de resumen y cotejo	Objetivos específicos de la investigación
MIGp1 MIGp2 MIGp3	Mrp1	OE1
MACp3 MACp4 MACp5 MACt4 MACt5	Mrp6 Mrt6	OE2
MACp4 MACp5 MACp6	Mr5	OE3
MACp4 MACp5 MACt4 MACt5	Mr4 Mr5 Mr6	OE4
MACp1 MACp2 MACp3 MACt1 MACt3 MACt6	Mr3 Mr4 Mr7	OE5
MACp4 MACp5 MACt4 MACt5 MACt6	Mr3 Mr4 Mr5 Mr6 Mr7	OE6

3.5. Síntesis del Capítulo: Las Fases de la investigación.

La investigación se desarrolló de acuerdo a las siguientes fases que se ilustran en el siguiente esquema:



Las fases o etapas en que se ha desarrollado esta investigación son las siguientes y se pueden observar en el esquema anterior.

Fase 1: Comprendió el inicio de la investigación, la recopilación de antecedentes y la localización del saber erudito de referencia. En el caso del álgebra de radicales corresponde situar en el edificio matemático con sus actuales desarrollos a la función exponencial y como caso particular cuando para esta función se utilizan exponentes racionales no enteros, donde se tiene la familia de funciones radicales de orden 2 en adelante.

En esta fase no sólo fue de interés acceder al conocimiento puro o erudito, sino también por medio de un análisis histórico – epistemológico conocer cómo se ha construido dicho saber, para lo cual se abordó este análisis empleando el Modelo de Toulmin para el cambio conceptual aplicado al concepto de raíz. De este modo, el Saber Sabio de referencia se obtiene como producto de un desarrollo humano y con historia, lo que permite tener una visión fortalecida en base a su propia episteme.

Este saber sabio que he simbolizado por SS, es el saber que utilicé de referencia para observar si en el saber a enseñar se han producido desvirtuaciones. En esta tesis, el estudio de esta fase se ubica en los apartados 2.8 y 2.9

Fase 2: Se inició con la determinación de los períodos en que se recopiló la información. Definidos los tres lapsos de tiempo, se localizó el saber a enseñar de los programas ministeriales por época, para lo cual se elaboró y validó con expertos las matrices de identificación general MIGp y de análisis de contenido MACp de recopilación de evidencias en los programas. Se obtiene así los datos para establecer cómo se deben enseñar los radicales según las normativas ministeriales. Luego se aplicó una matriz de resumen y cotejo Mr para producir un perfil del saber a enseñar de los programas

generalizado a las 3 épocas. Se obtuvo así un perfil por período, los que fueron triangulados para dar origen a la caracterización del saber a enseñar en los programas.

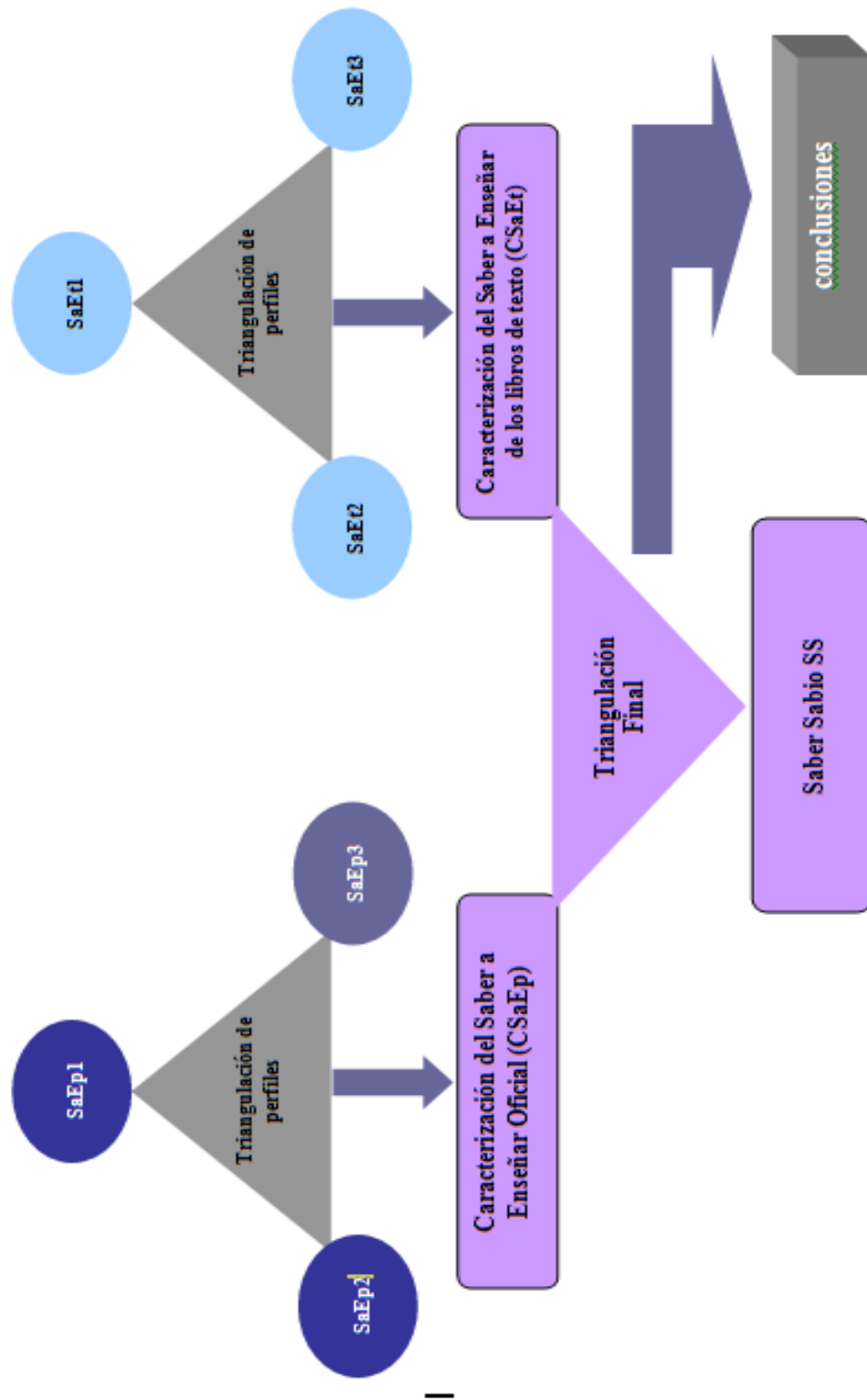
Fase 3: Se inicia con la selección de la muestra de los libros de texto. Luego se elaboró y validó con el juicio de expertos las matrices de identificación general MIGt y de análisis de contenido MACt para la recopilación y análisis de los datos. Se llega así a un cúmulo de información por período acerca del saber a enseñar promulgado por los libros de texto que se utilizan bajo un cierto currículo definido oficialmente por el gobierno de turno.

Fase 4: En esta etapa se organizó toda la información de la fase 3 por medio de una matriz de resumen y cotejo Mr, en la que (previamente validada) se construyeron los 3 perfiles representativos de cada uno de los períodos, lo que es posible por medio de la selección modal de aquellos campos de la matriz que aparecen con mayor frecuencia. Estos Perfiles se triangulan para conformar la caracterización del saber a enseñar de los libros de texto de todas las épocas tomando nuevamente como criterio la moda de los campos de las matrices Mr. De esta forma se determina la caracterización del saber a enseñar interpretada por los libros de texto.

Fase 5: Se nutrió del Saber Sabio (SS) producto de la fase 1, de la caracterización del saber a enseñar oficial o ministerial (CSaEp) arrojado por la fase 2 y de la caracterización del saber a enseñar de los libros de texto (CSaEt), los que en esta fase se triangulan dando paso a las conclusiones finales de investigación.

El siguiente esquema muestra en detalle las dos triangulaciones que se hicieron junto a la triangulación final.

Esquema para las Triangulaciones



PARTE II

**PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS
DE LA INFORMACIÓN**

CAPITULO 4

El Saber a Enseñar en los Programas Ministeriales en contexto.

4.1. Introducción.

La Determinación de qué matemática enseñar en la escuela a nivel país, pasa por la decisión de los expertos del Ministerio de Educación de acuerdo a un cierto contexto y momento histórico. Debe entenderse por tanto, que es un proceso variable en el tiempo, por el envejecimiento de los sistemas de enseñanza, pues el avance del Saber erudito o bien los nuevos tipos de problemas a que debe enfrentarse el ciudadano, hace que ya lo escogido como Saber a Enseñar quede obsoleto, originando una brecha entre el Saber sabio y el Saber a Enseñar, lo que Chevallard llama envejecimiento biológico. Un ejemplo de ello, es el algoritmo de la extracción de raíz cuadrada en aritmética. Este conocimiento formó parte del Saber a Enseñar en algunas épocas y constituyó un objeto de estudio. Hoy, queda a nivel de anécdota como ocurre también con el uso de los antiguos libros de tablas matemáticas, como las conocidas tablas Larsen.

Para comprender esta variabilidad en el proceso de la transposición didáctica externa, (previa a la que hace el profesor) y que transforma el Saber sabio en Saber a Enseñar por la actuación de la Nooesfera y que produce el escrito del texto del Saber a Enseñar con las directrices de los Programas Oficiales del Ministerio de Educación y retomados por algunos libros de texto que llegan al profesor con la misión de sugerir una “forma de hacer” en el aula, es necesario tomar conocimiento del contexto educacional permeado por el momento socio – político que vive la nación. De acuerdo a esto, damos una aproximación histórica (siguiendo la metodología del análisis Histórico - Crítico) para ubicarse en el tiempo y en el espacio para formar el contexto en el que aparecen los Programas Oficiales analizados en cada uno de los tres períodos y a su vez servirá de referencia para los capítulos que contienen el análisis de los libros de texto.

4.2. La Reforma Educacional de 1965.

4.2.1. Contexto socio – político y educacional.

A fines del año 1964 comienza una nueva proyección para la educación chilena, pues, luego de asumir el gobierno el Presidente Eduardo Frei Montalva (1964 – 1970), se plantea una serie de cambios en el ámbito educacional (fiel a la consigna de su campaña “todo tiene que cambiar”) que van dando vida a la Reforma de 1965. Según Soto (2000), en su texto “Historia de la educación chilena”, estos cambios fueron el producto de todos los aportes que se habían hecho desde la Reforma de 1928 en adelante, tomando como sus antecedentes más inmediatos los siguientes:

Primero, el Plan de Integración Educacional (Plan Arica), en 1961, cuyos objetivos fueron promover la integración de las instituciones y servicios educativos del Departamento de Arica bajo los postulados de la educación democrática y sobre la base de los principios de unidad, continuidad, correlación y diferenciación de la función educativa y descentralización de la administración educacional. Buscar una nueva estructura del sistema escolar que incluya los tipos de instituciones de educación sistemática y de desarrollo de la comunidad, necesarios para atender oportuna y eficientemente las necesidades culturales de los individuos de la zona y del país. Establecer normas para la dirección, organización y funcionamiento de un sistema educacional integrado, al servicio de la comunidad y en coordinación con las demás instituciones sociales. Este plan funcionó hasta 1971. (Soto, 2000).

Segundo, el informe titulado “Bases Generales para el planteamiento de la Educación Chilena”.

Tercero, la tarea de la Comisión de Planeamiento Integral de la Educación Chilena, integrada, en un principio, por expertos que no pertenecían al Ministerio de

Educación y apoyada por un equipo interdisciplinario ajeno a la administración ministerial, que procedía del Centro de Planificación Económica de la Universidad de Chile; más tarde, fue presidida por el Ministro, apoyado por su ejecutivo Óscar Vera, quien se encargaría de conducir el proceso entre 1962 y 1964 (Núñez, 1997).

Como resultado del trabajo de la Comisión de Planeamiento Integral de la Educación Chilena, fue posible obtener información fundamental para conducir el cambio, ya que los datos recopilados señalaban que una cantidad superior a los 150.000 niños aún estaban al margen del sistema escolar, que sólo el 32% de los alumnos que se matriculaban en primer año de educación primaria terminaba los seis años de escolaridad obligatoria y cerca del 50% de las deserciones se producía en los dos primeros años de la primaria. A raíz de esto, el número de analfabetos era cercano a 1.500.000 personas y la escolaridad promedio de la población llegaba a sólo 4,2 años y descendía a 2,4 en los sectores rurales.

Por otra parte, la educación secundaria y técnico profesional, no eran capaces de recibir a todos los egresados de la educación primaria, por lo que el 30% de éstos no podía continuar sus estudios porque no existían cupos. Además, debido a la rigidez de los sistemas de promoción y la separación absoluta entre el liceo y las escuelas profesionales, la deserción en la educación media alcanzaba a un 75%. Por lo tanto, se presentó un grave problema social, ya que en 1960 unos 160.000 jóvenes entre 15 y 18 años de edad no estudiaban ni trabajaban. Además, sólo un escaso porcentaje de personas llegaba a la universidad y la deserción en este nivel alcanzaba a un 40%. De los que ingresaban, sólo el 3% eran hijos de obreros y campesinos.

Por último, los fines, objetivos, estructura, planes, programas y métodos se habían mantenido invariables desde comienzos de siglo, es decir, se seguía un sistema rígido y centralizado en el ámbito educacional.

A raíz de estos antecedentes, se comienza a trabajar en una amplia planificación para una Reforma profunda y gradual de la Educación Chilena, puesto que se transformó en una urgencia, convirtiéndose en la primera prioridad del Gobierno. Es por ello que todo el aparato educativo pasó a manos de un nuevo grupo de inspiración tecnocrática, los que, sobre la base del material recopilado por la Comisión, elaboraron una propuesta de transformación global.

La propuesta se basaba, en gran medida, en los postulados humanistas del filósofo católico Jacques Maritain y en la teoría desarrollista impulsada por organismos como la CEPAL (Comisión Económica Para América Latina) y la Alianza para el Progreso. De acuerdo a lo señalado por la Superintendencia de Educación Pública, los lineamientos de acción se establecieron sobre cuatro principios fundamentales, donde el fondo teórico se resume en los siguientes aspectos:

a. **Asegurar una efectiva igualdad de oportunidades ante el sistema educacional**, considerando el ingreso, permanencia y avance en él, de suerte que pudiera caracterizarse como verdaderamente democrático, sin otro límite que las capacidades personales.

b. **Responsabilidad socio – cultural de la educación.** Como complemento de su papel de proceso formativo integral de la personalidad, se valoró también el rol decisivo que debe cumplir la educación en la integración de la persona a la vida en comunidad, como un elemento determinante del cambio social. En este contexto, se darían las condiciones necesarias a la educación para alcanzar una **sociedad abierta** a través de una **educación abierta**.

c. **Formación para la vida activa.** Se toma conciencia de que la educación es un agente esencial para conducir al país hacia un desarrollo, el cual debe apoyarse sobre bases sólidas, por lo tanto, requiere de un estrecho contacto con las diversas formas operacionales del trabajo y de responder a la necesidad de proporcionar al país

los diversos niveles de recursos humanos necesarios para su progreso, en la cantidad y calidad adecuadas.

d. **Educación como proceso de toda la vida.** La formación del hombre y su incorporación a la vida social y del trabajo son enfocados como un proceso que se ha de prolongar a través de toda su existencia, de tal forma que asimile nuevos contenidos y experiencias, en concordancia con el ritmo de avance que la ciencia y la técnica imponen al mundo del conocimiento. De esta manera, junto con la renovación periódica de la calificación de los recursos humanos para la actividad productiva, se daría paso a importantes modificaciones de los conceptos que configuran los sistemas de enseñanza en sus diversos niveles.

Estos cuatro principios orientaron y delinearón las **estrategias educativas** que se abordaron simultáneamente en el periodo de gobierno:

- i. Expansión cuantitativa del sistema, tendiente a igualar las oportunidades.
- ii. Diversificación y reestructuración administrativa del sistema.
- iii. Desarrollo y mejoramiento cualitativo del sistema, modernizando la práctica escolar.

El diagnóstico entregado por la Comisión de Planeamiento Integral fue fundamental para evidenciar que lo más urgente era **asegurar educación para todos**, es por ello que los cambios se establecieron sobre este objetivo durante el año 1965, firmándose el 07 de diciembre del mismo año tres decretos: el N° 27.952, que introduce una nueva estructura al sistema educacional; el de promoción automática, válido sólo para el primer grado y el que crea el Séptimo Año, alargando la enseñanza, con el propósito de elevar el nivel cultural del país, con ocho años de escolaridad obligatoria para todos los chilenos. Con esto se da comienzo formal al proceso de Reforma.

La Reforma es iniciada siendo Ministro Juan Gómez Millas. La nueva estructura consistió en dejar en cuatro años a la Educación Media, incluyendo en ella a la Educación Científica – Humanista (ex Educación Secundaria) y a la Educación Técnico Profesional. Ambas modalidades poseían un plan común en 1° y 2° año de Educación Media para permitir la movilidad horizontal de los alumnos. Se dejó este nivel, exclusivamente para adolescentes, al terminar con los cursos de preparatorias que hasta entonces existían anexos a los liceos fiscales. Por lo tanto, se conectó la Educación Primaria con la Educación Media.

En marzo del año siguiente, las escuelas recibirían al nuevo contingente, tomando en cuenta que los liceos ya se habrían desprendido del Primero de Humanidades. Y en 1967, los alumnos y alumnas de Séptimo Año '66 ingresarían a Octavo (ordenado también por decreto).

En su esencia, la Reforma de 1965 consistió en alargar de seis a ocho años la Educación Primaria, denominándose Educación Básica; al mismo tiempo, se acortó de seis a ocho años la Secundaria, llamándole Educación Media.

En síntesis, los cambios se podrían graficar en la siguiente tabla:

Tabla 4.1. Cambios del Sistema educacional Chileno.

Educación				
Primaria	6 años	----->	Básica	8 años
Secundaria	6 años		Media	4 años
Total	12 años	----->	Total	12 años

Sin embargo, la Reforma no consistió solamente en un cambio que suma años en una parte y resta en la otra, sino que la prolongación de la Educación Básica significó una expansión, ya que se masificó y abrió sus puertas al mundo rural y a la periferia de las grandes ciudades; en tanto, la Educación Media quedó reducida a menos de dos

tercios, desapareciendo las Humanidades con su calidad y su posibilidad de dar oportunidades de surgir a los sectores populares hacia tramos más altos de la sociedad, perdiendo, así mismo, su aire señorial y su sello característico de solidez y respetabilidad (Rojas, 1997).

La propuesta parecía cubrir todos los puntos y el primer paso para ponerla en marcha fue la realización de un Censo Escolar Nacional en diciembre de 1965, que reveló un aumento en la demanda por matrícula, ascendente a 186.106 niños y niñas (13,7%). La cobertura saltó al 92%, llegando al 95% en 1970. Esta demanda implicó la construcción inmediata de nuevas aulas y escuelas, por lo que se organizó un plan de expansión y de edificación escolar, que se fue implementando poco a poco hasta conseguir la construcción de 6.038 salas de clases y talleres correspondientes a 1.535 escuelas (Leyton, 1970).

Al comienzo, hubo que palear las carencias utilizando el ingenio, ya que faltaban aulas, mesas, sillas e, incluso, personal docente. Sin embargo, en forma progresiva todas las escuelas fueron dotadas de mobiliario y se crearon bibliotecas, talleres y laboratorios.

También, se equiparon con maquinarias para impresión y audiovisuales. Se reinició la distribución masiva de útiles y textos escolares.

Ante la falta de personal docente, se recurrió a la formación rápida de un contingente, al mismo tiempo que se iniciaron los programas masivos de perfeccionamiento. Liceanos recién licenciados, estudiantes de pedagogía, funcionarios de otras reparticiones públicas o del área privada, reincorporados, etc., acudieron al llamado hecho por la autoridad y en semanas o meses asumían la delicada responsabilidad de ir formando espiritualmente esa arcilla humana, puesta en sus manos por miles de padres esperanzados en el porvenir de sus hijos (Rojas, 1997).

Por otro lado, se organizó la Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas (JUNAEB), con el objetivo de atacar el efecto de algunas variables sociales y económicas que afectan en el ausentismo y la deserción escolar. Todo ello significó que el gasto fiscal subió al 20% del presupuesto total del país.

Finalmente, la diversificación del sistema estableció una estructura que se distribuyó en cuatro niveles (Decreto del 07 de diciembre de 1965), quedando de la siguiente manera: 1.Educación Parvularia, 2.Educación General Básica de ocho años de duración, común para todos los niños y niñas entre 6 – 7 años y 14 – 15 años, 3.Educación Media, con cuatro años de duración. Con una modalidad Científico Humanística y una técnico Profesional, esta última dividida en cuatro ramas: Comercial, Agrícola, Industrial y Técnicas Especiales, 4.Educación Superior (Soto, 2000).

Sin duda, tanto la expansión cuantitativa del sistema, como la diversificación y reestructuración administrativa del mismo, fueron evidentes y comprobados por medio de las estadísticas; no obstante, el mejoramiento y desarrollo cualitativo del sistema se alcanzó a través de: Cambios que se establecieron en los planes y programas en la formación de profesores primarios; la introducción de nuevos planes y programas de estudio en la Educación Básica y Media; equipamiento de escuelas y liceos; la creación del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP); el Servicio Nacional de Orientación; el servicio Nacional de Supervisión; cambios en las normas y en los criterios de evaluación del rendimiento escolar y de promoción (como la promoción automática en los primeros grados de Educación Básica); la puesta en marcha de un programa para la educación especial que atiende niños con déficit y una gama de experiencias educacionales (Programa de Lecto – Escritura, **Programa de Matemática**, Programa de Educación Sexual y Vida Familiar).

En conclusión, el efecto inmediato de esta Reforma fue el aumento notable de la cobertura a 95%, que los analfabetos disminuyeran a 900.000, que el ingreso a la

Educación Media, de todos los egresados de Básica, se produjera sin trabas y que las plazas que ofrecía la Educación Superior aumentaran.

Durante el periodo de Gobierno del Presidente Eduardo Frey Montalva, el contexto de esta Reforma mantuvo su curso, desarrollándose en forma progresiva, sin variar en sus objetivos. Sin embargo, en 1970, al asumir el Gobierno el Presidente Salvador Allende (04 de septiembre), los técnicos de la Unidad Popular se plantearon un conjunto de objetivos que debían ser alcanzados durante el sexenio. A partir de la elaboración de un Sistema Nacional de Educación, debía garantizarse, en primer lugar, la igualdad de oportunidades; luego, favorecerse el pleno desarrollo de las capacidades y singularidades humanas y, por último, se debía constituir un sistema regular unificado, ligado estrechamente al desarrollo económico, social y cultural del país a través de una nueva organización escolar.

El Gobierno deseaba que la Escuela Nacional Unificada (ENU) fuera conocida por todo el país y para ello promovió debates acerca del tema. Dentro de las discusiones, se le caracterizaba por las siguientes peculiaridades: nacional, unificada, diversificada, democrática, pluralista, productiva, integrada a la comunidad, científica y tecnológica, humanista y planificada (Odeplan, 1972)¹. Dado el saturado ambiente político no se examinó la propuesta con criterio técnico y, si se hizo, pasó primero por el prisma ideológico. El 11 de septiembre de 1973 se pone término al Gobierno del Presidente Salvador Allende.

Desde ese momento, se da comienzo al Gobierno Militar, en el que la primera medida en el ámbito educacional fue limpiar de los programas de estudio objetivos y contenidos que, a juicio de la nueva autoridad, atentaban contra los principios y valores que sustentaban. Ésta es la primera de muchas otras que se aplicarían sucesivamente durante el Régimen Militar, hasta la nueva Reforma dictada en 1981.

¹ ODEPLAN (Oficina de Planificación Nacional).

4.2.2. Revisión de los Programas Ministeriales de esta Reforma.

En este período, como se ha mencionado anteriormente, se modifica la estructura del sistema escolar, sin afectar su duración total, aumentando de 6 a 8 años la educación primaria bajo el nombre de Educación General Básica, y disminuyendo en tanto de 6 a 4 el ciclo **de las humanidades** en lo que se denominó Enseñanza Media y que perdura hasta hoy.

4.2.2.1. Decreto.

Con fecha 07 de diciembre de 1965, se publica en el Diario Oficial el Decreto N° 27.952 que modifica el Sistema Educacional Chileno, el que indica que los cambios se aplicarán paulatina y progresivamente.

En el artículo 1° se señala que dicha aplicación se realizará desde 1966 gradualmente, en los establecimientos públicos y los privados conforme a las normas legales vigentes, bajo la siguiente estructura:

Tabla 4.2. Estructura del Sistema Escolar por niveles.

Niveles
Educación Parvularia.
Educación General Básica.
Educación Media (tanto Humanístico – Científica como Técnico – Profesional).
Educación Superior.

La Educación General Básica, en adelante EGB, se instala como obligatoria y gratuita (Artículo 3°) sólo para los 6 primeros años, tal como aparece en las normas fijadas por la Ley de Educación Primaria. La EGB prepara a un estudiante tanto para su vida laboral como para la continuación de sus estudios a nivel medio.

En el Artículo 4° se especifica la Educación Media como el Nivel de prosecución de estudios del egresado de la EGB, sus dos modalidades articuladas para permitir la transferencia de alumnos, la científico – humanista (extensión de la formación general de la EGB), y la técnico – profesional que lo prepara para desarrollarse en diversos oficios y funciones técnicas que requiera el país. En ambas modalidades junto a la EGB completan 12 años de estudios escolares.

Un dato curioso que aparece en el artículo 5° es la posibilidad que abre el Ministerio por su propios medio o con ayuda de las Universidades y que le da a todo egresado en Enseñanza Media para prepararse como profesor de EGB o realizar estudios terminales en el área de la formación técnica – profesional que ya hayan iniciado con anterioridad.

Con la misma fecha del decreto anterior, se publica el Decreto N° 27.953 que crea el 7° año de EGB, que corresponde a su vez a la eliminación del primero de humanidades, el que debe ser aplicado desde 1966. Aparecen también nuevas denominaciones: Las asignaturas de matemáticas comerciales o matemáticas pasan a llamarse simplemente matemáticas. (Artículo 9°), la que se dicta con 4 o 5 horas semanales de clases (Artículos 3° y 5°).

El 19 de Noviembre de 1966 se publica el Decreto N°13.451 que fija plan de estudios y normas de funcionamiento para los cursos de 7° y 8° año de EGB, en que éste último regirá desde 1967. Su plan de estudios crea 6 horas semanales para matemáticas. En este decreto además se deroga el artículo 5° del decreto N° 27.953, haciendo la misma repartición horaria para 7° y 8° de EGB. (Artículo 9°).

Así, la calendarización para la puesta en marcha de los programas de EGB se implementa entre 1966 y 1967, mientras que para la Enseñanza Media corresponde a los años siguientes, según el decreto 27.952:

Tabla 4.3. Calendarización de la implementación del nuevo marco curricular.

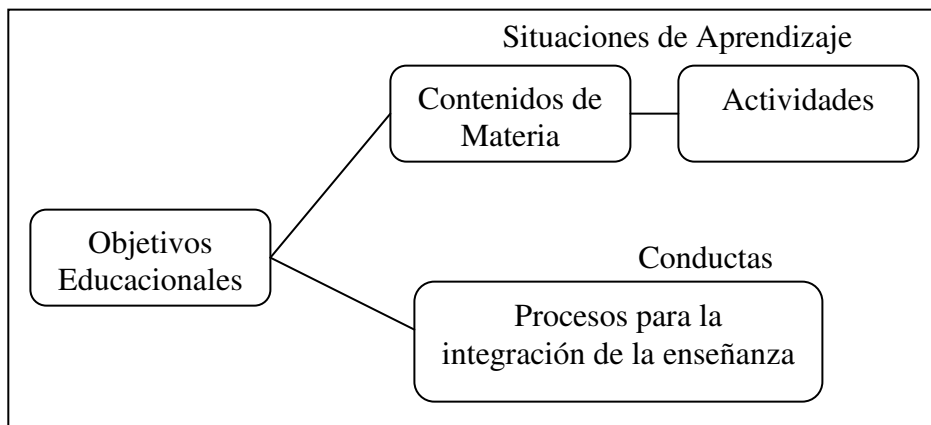
Nivel	Año de implementación
1° medio	1968
2° medio	1969
3° medio	1970
4° medio	1971

4.2.2.2. Características generales de los Programas Oficiales por período.

El primer programa de estudio para enseñanza media, esto es, el correspondiente al 1° año, aparece en el número cinco de edición extraordinaria de la Revista de Educación, fechada en abril de 1968, en el que se observa la presencia del paradigma conductista de la psicología imperante en el que se declara en la página 3:

“...el énfasis de los nuevos programas para el primer año de enseñanza media se marca en la vivencia de los procesos intelectuales, en la ejercitación en los métodos de indagación, la iniciación en la integración personal y en el trabajo en grupo, la aplicación de los principios científicos, el hacer artístico creador, etc.

El esquema conceptual que abordarán todos programas y que sólo se especifica en el de primer año medio, a suerte de ser abordado en los siguientes, es del siguiente tipo:



Se establecen como esenciales estos dos aspectos en los nuevos programas y entonces el énfasis que en Matemáticas se coloca en las actividades de rutina, resolución de ejercicios, sin marcarse en ningún lugar el campo de la resolución de problemas.

4.2.2.3. Programa Seleccionado y su identificación.

El álgebra de radicales aparece como objeto de estudio en el Programa de 2° año de enseñanza media, el que se publica en una edición especial, la N°14 de la Revista de Educación fechada en Marzo de 1969 y que debe ponerse en marcha el mismo año en todos los establecimientos fiscales y particulares del país. La revista consta de 98 páginas conteniendo además los programas de las otras asignaturas. La sección dedicada al Programa de Matemáticas va de la página 91 a la 98, lo que evidencia lo breve que es en relación a los programas actuales.

4.2.2.4. Secciones del Programa.

El índice del Programa de segundo año medio es el siguiente:

- Introducción.
- Organización del Programa.
- Conductas deseables.
- Unidades Programáticas.
- Primera Unidad: Los Números Complejos.
- Segunda Unidad: Álgebra en \mathbb{R} .
- Tercera Unidad: Geometría Vectorial.
- Sugerencias metodológicas generales.
- Bibliografía.
- Criterios y formas generales de Evaluación.

4.2.2.5. Referencias Bibliográficas del Programa.

Como se vio en el apartado inmediatamente anterior, el penúltimo punto incluye la bibliografía, que expone es de “consulta para el profesor”. Las ocho obras allí citadas son:

1. Allendoerfer Y. Oakley, “Fundamentos de las Matemáticas Universitarias”. Editorial de Ediciones del Castillo, S.A. Madrid, 1966. Traducción.
2. Papy, “Matemática Moderna”. Editorial Universitaria. (Eudeba). Buenos Aires, 1967.
3. C. Trejo, J. Bosch, “Matemática Moderna”, 2° y 3° curso. Editorial Eudeba, 1967.
4. H. Taylor y T.L. Wade, “Matemáticas Básicas”. Editorial Limunsa - Willey, México, 1966.
5. C. Bréard, “Mathematiques”, 2e. Editorial L'école. París. 1961.
6. Lentin y Rivaud, “Álgebra Moderna”. Editorial Aguilar; Madrid. 1966.
7. Frank Ayres Jr. “Modern Algebra”, Schaum's, Outline Series.
8. R. P. J. Hernández y otros. “Conceptos Básicos de Matemática Moderna”. Editorial Codex, S.A.

De estas ocho obras, cinco desarrollan las temáticas de las matemáticas modernas a las que hacemos referencia en el marco teórico, y que como mencione, trajo graves problemas a la educación matemática. Se entiende con esta bibliografía la concepción formalista imperante en el mundo.

4.2.2.6. Lugar Oficial del Álgebra de Radicales en el Saber a Enseñar.

Uno de los problemas que hemos denunciado al iniciar esta investigación, es la trascendencia que tiene el concepto de raíz y su diferenciación con el de radical (o raíz principal o aritmética), respecto del cuerpo de los números complejos. Por esta razón, se examinó este programa en su primera Unidad, pero se constató un tratamiento netamente matemático, estructuralista, como lo indican las matemáticas modernas predominantes en el mundo. En este tratamiento, se presentan los números complejos como pares ordenados, enfatizando las propiedades en relación a las estructuras algebraicas de anillo, luego dominio de integridad y finalmente de cuerpo no ordenado, llegando como máximo a las potencias binomiales $(a+bi)^n$, sólo para a y b racionales y n entero, lo que no permite encuentros con los radicales, ni con raíces al no mencionarse el origen de estos números por la resolución de la ecuación cuadrática $x^2+1=0$, de la que no disponen según el orden de las unidades, pues este contenido aparece en la segunda unidad.

Precisamente en la segunda Unidad del Programa para 2° año de Educación Media, titulado “Álgebra en R”, se estudia el álgebra de radicales, cuya ecología conceptual se encuentra relacionada con las Potencias, Módulos de Números Complejos (aplicaciones de lo que llaman raíz aritmética) y ecuaciones de segundo grado.

Todo este entorno ecológico se revisa en detalle para obtener la mejor aproximación del tratamiento de la radicación en el ambiente algebraico y las concepciones matemáticas que la subyacen.

4.2.2.7. Propósitos explicitados por los programas acerca de los tópicos relacionados con los radicales.

Los propósitos en este programa vienen definidos por “conductas deseables”, explicitando que:

“...un objetivo realmente evaluable es una conducta que se especifica en un contenido determinado” (p.94).

Se indica además que es el docente a quien le corresponde desglosar las siete conductas deseables “amplias” expresadas en el programa. Revisando las 7 conductas deseables que ofrece el programa, se observa que todas son generales respecto de la matemática, ninguna se hace cargo de la especificidad que se precisa en este apartado, por lo que no se da la información requerida. Los autores del programa, dejan esto a manos del profesor, siendo crucial otros de los dispositivos en que se puede auxiliar: **Los libros de texto.**

4.2.2.8. Organización de los contenidos.

El bloque de la segunda unidad “Álgebra en \mathbb{R} ”, está compuesto por la siguiente red de contenidos:

- Axioma del Supremo; cuerpo ordenado y completo. Conjunto \mathbb{R} .
- Potencias de Base real con exponente natural. Potencias de base no nula con exponente entero.
- Raíces de radicando real positivo e índice natural; existencia de la raíz aritmética. Aplicación al módulo complejo.
- Ecuaciones de segundo grado, con coeficientes reales; existencia y propiedades de sus raíces o soluciones. Ecuaciones de segundo grado con coeficientes complejos; existencia y propiedades de sus raíces o soluciones.
- Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

- Potencias de base real positiva y exponente racional. Potencias de base real positiva y exponente real. La Función Exponencial.
- Inversión de la función exponencial; la función logarítmica. Propiedades de los logaritmos. Cálculo logarítmico, tablas logarítmicas.

Se considera: Claramente el sentido estructuralista y formal del tratamiento de los contenidos, al iniciar la Unidad con el estudio abstracto de los números reales con el axioma del supremo, lo que debe fundamentar la existencia de la única raíz aritmética enésima o radical enésimo en \mathbb{R} , aunque no se habla de una demostración en el tercer contenido y sólo en la existencia, que podría ser dada axiomáticamente en la construcción del objeto escolar.

En el tercer contenido, lo describen así: “Raíces de radicando real positivo e índice natural; existencia de la raíz aritmética. Aplicación al módulo de un complejo”, lo que hace entrever que llaman raíces y no radicales a las expresiones con uso de $\sqrt{\quad}$, y más tarde en el último contenido referido a las ecuaciones cuadráticas, mencionan la palabra raíz como sinónimo de solución. Se tiene entonces, un discurso que confunde al no explicitar diferencias entre raíz y radical o bien raíz como número y raíz como operador.

Me parece, un ambicioso y abstracto programa que en segundo medio debe cumplir con la articulación de radicales, potencias, logaritmos, ecuaciones e inecuaciones cuadráticas y las funciones.

En el caso particular de este programa de estudios, a la derecha de cada contenido, aparecen actividades que desarrollan más puntualmente lo que se quiere decir con estos contenidos. Abordaremos esto, con una interpretación más detallada en el apartado 4.2.2.10.

4.2.2.9. Orientaciones explicitadas acerca de los radicales.

Sólo se dan recomendaciones generales acerca de la flexibilidad del programa. Algunos de los elementos para destacar en cuanto a esta investigación son:

- Distribución de la Unidad de Números completos 20%, para de Álgebra en IR un 40% y para la de Geometría Vectorial 40% según el programa ministerial.

Esta sugerencia nos da una idea del tiempo destinado para álgebra.

- Se instala la necesidad de deducir pruebas sencillas por procedimientos válidos.

Este punto se comprende mejor al leer la siguiente sugerencia relacionada con la unidad 2, que creemos necesario citar textualmente:

“Tradicionalmente la unidad de álgebra en R pretendía lograr que los alumnos alcanzaran un cierto dominio en la resolución de ecuaciones de segundo grado y se situaciones que dan por resultado esas ecuaciones. Estas actividades, entre otros objetivos específicos, implicaban la operatoria con expresiones algebraicas. Hoy, lo que se propone, no es abandonar estos objetivos, siempre esenciales en la disciplina, sino agregar la existencia de un conocimiento más riguroso de las propiedades de las potencias y de las raíces para que la resolución de ecuaciones no tropiece con las serias dificultades, que por lo demás, ya ocasionaban cierto desconcierto en los alumnos. En la actualidad nos parece más importante que los alumnos reconozcan el **AMBITO MATEMÁTICO A QUE PERTENECEN LAS ECUACIONES U OTRAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS** y, por lo tanto, aprecien el significado de las soluciones correspondientes, antes que desarrollar complejidades en las ecuaciones mismas”(Programa 2° ano medio, MINEDUC 1969).

Se advierte la presencia del rigor en las propiedades de las potencias y de las raíces, rigor que se explicita a través de los campos de validez y de algunas de las demostraciones, sin abandonar, dice, la ejercitación o rutina que hasta esa época era lo primordial (ser un buen calculista).

En síntesis, las sugerencias en correspondencia con los contenidos, no poseen una mirada frente a la resolución de problemas variados, sino sólo del mundo matemático.

4.2.2.10. Actividades o ejemplos propuestos.

Sólo hay descripciones verbales, **no se dan ejemplos**. Seleccione sólo las pertinentes para ese estudio:

Actividades relacionadas con Potencias:

- Demostrar las propiedades fundamentales para potencias de exponente natural y ejercitarlas. Ampliar al caso de exponentes enteros, también con demostraciones sencillas.

Actividades relacionadas con los radicales

- **Definir** el concepto de raíz de la siguiente manera: Se llama raíz n -ésima de x real a todo y , también real, tal que $y^n = x$ con n natural.
- **Destacar** la raíz real y positiva, “llamándola raíz aritmética”, y representándola por \sqrt{x} . Dar ejemplos sencillos.
- **Distinguir** los casos en que el índice es par o impar.
- **Probar** los teoremas referentes a la raíz aritmética.
- **Examinar** el caso del radicando negativo y el índice impar y las propiedades fundamentales de estas raíces.
- Partiendo de la definición de módulo de un número complejo, probar a modo de ejercicio, algunas relaciones fundamentales entre módulos.
- **Definir** raíz cuadrada de un número complejo; constatar que sólo hay dos raíces cuadradas de un complejo.

Estas actividades enunciadas como objetivos se enmarcan en un plano netamente operativo – instrumental (Quintanilla y Labarrere, 2006). Se detecta claramente que los conceptos están bien definidos, y que toma como alternativa incorporar los números negativos como radicandos, cuando alude a distinguir los casos de índice par o impar. Más adelante incorpora el estudio de la función exponencial y es allí donde queda la duda de cómo harán los destinatarios de este programa para articular las potencias de exponente racional con los radicales de orden impar de números negativos, puesto que se tendrá que saldar las restricciones que son cada vez más exigentes a la hora de extender el concepto de potencia para exponentes racionales y reales en general.

Se evidencia luego un listado de actividades relacionadas con el siguiente contenido, “las ecuaciones de segundo grado”, en las que se observa que se dan actividades relacionadas con el gráfico de la función cuadrática para llegar a la ecuación de segundo grado, por la búsqueda analítica y luego algebraica de lo que llaman “ceros de estas expresiones” y dice luego “concluir que resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es encontrar los ceros del polinomio $y = ax^2 + bx + c$ (las raíces de la ecuación)”, frase en que se advierte que se emplea correctamente el término raíz, pero ya ampliado, no sólo como raíz aritmética. Sin embargo, no hay mayor referencia al uso y distinción del radical y de la raíz.

Algunos comentarios:

1. Conceptualiza correctamente Raíz enésima. Menciona también correctamente que \sqrt{x} es la raíz positiva, pero olvida su unicidad.
2. Llama a trabajar con radicandos negativos e índices impares. Aquí queda la duda de cómo el docente lo interpreta y si considera que $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, con $a \in R, n \in N$.
3. En cuanto a probar los teoremas de la raíz aritmética, no se pronuncia acerca de hacer o no alguna demostración.

Posteriormente, otros de los objetivo matemático relacionados con los radicales, corresponde a:

- Potencias de base real positiva y exponente racional.
- Potencias de base real positiva y exponente real.
- La función exponencial.

Para este conjunto de contenidos, se enuncian las actividades siguientes:

“Extender la definición anterior de potencia² al caso en que la base a es un número real positivo y el exponente es un racional. Demostrar las propiedades fundamentales de estas potencias. Abordar la noción de potencia en el caso de base real positiva y exponente x real, distinguiendo los casos $a > 1$ y $a < 1$. Definir estas potencias como supremo de un conjunto acotado de potencias de exponente racional. Extender a este caso general las propiedades de las potencias ya vistas en los casos anteriores. Confeccionar gráficos de funciones exponenciales”().

Con estas actividades enunciadas tal como están, sin mayor orientación metodológica, se puede ver que el saber oficial propuesto liga la función potencia con la exponencial de modo natural, con la correcta restricción de la base positiva.

Por otra parte, se indica realizar la demostración de las propiedades de las potencias para estos - digamos - “nuevos” tipos de exponentes, sin embargo, no menciona cómo se ha de hacer la demostración. Esto propicia observar qué hacen **los libros de texto**, que estarán a cargo de interpretar estas actividades y desarrollarlas (en rigor, de aquellos que consideren este programa, claro está). Este punto es crucial, pues está dentro de las posibles situaciones que interesa **en esta tesis**: El lugar y las bases de demostración que se utilizan. Luego se insiste en extender las propiedades de las potencias a las que tienen exponente real, manteniendo la base restringida a los reales positivos, pero con la diferencia que no se indica realizar alguna prueba de estos teoremas.

² Se refiere a las potencias de exponente entero.

Cabe aquí una gran cantidad de interrogantes respecto a las libertades que se le deja al destinatario de este programa y que no podremos responder con la información dada, sólo levantar esta preocupación³:

1. ¿Qué demostraciones se hacen y en qué se basan?.
2. ¿Hasta qué punto se articula la formalidad con la informalidad de las presentaciones?. Esta pregunta surge, luego de leer la actividad que se refiere al uso del concepto de supremo.

3. ¿Se muestra a los estudiantes que se está hablando de dos funciones distintas?. La pregunta nace de la manifestación implícita de las funciones potencia y exponencial y además, no se señala el uso de las representaciones $a^{\frac{p}{q}}$ y $\sqrt[q]{a^p}$, su vínculo y la composición de funciones entre la exponencial y la función racional:

$$(g \circ f)(x), \text{ donde } f(x) = a^x \text{ y } g(x) = \frac{1}{x}.$$

Así es como el programa no permite con el discurso expuesto, extrapolar posibles respuestas a estas interrogantes, observándose si un énfasis notable en la rigurosidad de los conceptos en un paradigma estructural predominante en la época en el mundo, con tratamientos de los objetos matemáticos que se caracterizan por una débil transposición didáctica externa.

³ Es clave el análisis de los libros de texto de mayor uso en este período, en los cuáles los profesores de aquel entonces buscaron posibles rutas de realizar su trabajo de transposición interna, a la luz del programa ministerial.

4.3. La Reforma Educacional de 1981.

4.3.1. Contexto socio – político y educacional.

La historia del sistema escolar chileno señala que, tradicionalmente, éste poseía un carácter muy centralizado, en el sentido de que el Estado financiaba y administraba el sistema educacional público, ofreciendo educación gratuita a todas las personas, independientemente de los alcances económicos de sus familias, con la consigna de obligatoriedad del nivel básico. Por lo tanto, cumplía un rol fundamental en su prestación, así como en la determinación de sus orientaciones y metas.

En la década del '80, durante el Régimen Militar (1973 – 1990), esta tradición se rompió abruptamente con la aplicación de una Reforma educacional descentralizadora y privatizadora del sistema (es en el mes de julio de 1979 cuando se plantea traspasar la función operativa del MINEDUC a los municipios). En ese marco, el Estado pasó a tener un rol subsidiario, siendo el mercado el principal ente regulador de las actividades en el ámbito educacional. Esta gran Reforma educativa de tipo neoliberal, se consolidó el año 1981, aplicando tres grandes cambios:

i. En primer término, transfirió la administración del conjunto de los establecimientos escolares, hasta entonces dependientes del Ministerio de Educación, a los 325 Municipios del país (de esa época), los que pasaron a manejar su personal, con poder de contratar y despedir profesores, y administrar su infraestructura, mientras el Ministerio de Educación mantenía funciones normativas, de definición del currículum y de los libros de texto, de supervisión y de evaluación.

ii. En segundo lugar, cambió la forma de la asignación de los recursos, de una modalidad basada en los presupuestos históricos de gasto de los establecimientos a una modalidad basada en el pago de una subvención por alumno atendido;

adicionalmente, el pago por alumno fue calculado de modo de operar como incentivo económico para el ingreso de gestores privados dispuestos a establecer nuevos establecimientos de educación básica y media.

iii. Por último, la reforma traspasó la administración de un número de establecimientos públicos de educación vocacional (nivel medio) desde el Ministerio de Educación a corporaciones constituidas ad - hoc por los principales gremios empresariales.

Estas orientaciones eran plenamente coherentes con el modelo económico neoliberal vigente, que promovía el desarrollo de la iniciativa privada, la competencia y el lucro. Es decir, “como marco regulador prevalece el esquema neoliberal, el que en el caso de la reforma chilena se expresa en una abierta descalificación de la capacidad administrativa del Estado y en una confianza casi ciega en el sector privado”⁴.

Desde este enfoque, tanto los propósitos gubernamentales explícitos, como los implícitos – tras las políticas descentralizadoras y privatizadoras de los años 80 — fueron orientados al logro de una mayor eficiencia en el uso de los recursos, a través de la competencia entre establecimientos por matrícula; el traspaso de funciones desde el Ministerio de Educación y su burocracia central a los poderes locales representados en el Municipio, así como la disminución del poder de negociación del gremio docente; una mayor participación del sector privado en la provisión de la educación, lo que establecería bases para una mayor competencia entre establecimientos y mayores opciones para los consumidores; por último, una cercanía mayor de la educación media técnico - profesional a los ámbitos económicos de la producción y los servicios.

⁴ Espínola, Viola (1991) Descentralización del sistema escolar en Chile (Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación, CIDE).

De esta misma manera, y también vinculado con las disposiciones del modelo económico, se produjo un cambio en el sentido y los objetivos de la educación, pues de una valoración por el ser humano y la formación de los sujetos en tanto ciudadanos, se trasladó a una concepción de los alumnos como consumidores y parte funcional del engranaje de la producción. Asimismo, el profesor pasó a ser un instrumento al servicio de estos fines.

Los cambios que introdujo la reforma pretendieron hacer más eficiente y racional la administración estatal en educación, especialmente en lo relativo al manejo de los recursos económicos. En este sentido, se planteó que el Estado era excesivamente burocrático e ineficiente y que, por lo tanto, requería desligarse de sus funciones tradicionales en el plano educativo. No obstante, se observan propósitos más de fondo relacionados con tres aspectos principales:

- a) Entregar la regulación de la educación a los mecanismos de mercado, en conformidad con las orientaciones del modelo económico neoliberal.
- b) Disminuir el gasto en educación.
- c) Debilitar a las organizaciones de los trabajadores.

El objetivo de mejorar la calidad de la educación quedó supeditado al logro de una mayor eficiencia administrativa, a la atracción de recursos desde el sector privado y a la competencia entre establecimientos.

Los mecanismos que se utilizaron durante este periodo para alcanzar los objetivos propuestos, se dividen en los siguientes elementos:

- **Descentralización administrativa:** El proceso de descentralización (municipalización y privatización) se relaciona con el traspaso de las escuelas básicas y secundarias del Ministerio de Educación a las municipalidades. El Ministerio abandonó sus funciones históricas (financieras, administrativas, pedagógicas), asumiendo tareas más vinculadas a la supervisión, control y

evaluación de programas, planes y proyectos. Con la descentralización, los municipios debieron asumir nuevas funciones y responsabilidades; sin embargo, la mayoría de ellos carecía de las capacidades técnicas y administrativas para manejar eficientemente los desafíos que implicaban los cambios. Por esta razón se produjeron diversos problemas, entre ellos, dificultades en el manejo de la planta de profesionales y empleados y en la utilización de los recursos financieros.

- **Financiamiento vía subvención por alumno:** Una de las modificaciones más importantes que introduce la reforma educacional está relacionada con el sistema de asignación de recursos a las escuelas. En este sentido, se abandonó el financiamiento de acuerdo con el gasto histórico (muy ligado al tema salarial) para incorporar el sistema de financiamiento por alumno, es decir, un mecanismo de asignación proporcional a la asistencia mensual de alumnos a los establecimientos escolares. De este modo, las escuelas entraron en competencia por atraer alumnos, situación que, según los precursores de la reforma, contribuiría a la eficiencia interna del sistema. Sin embargo, este objetivo sólo se cumplió parcialmente. Las familias más favorecidas fueron aquellas que tuvieron acceso a información privilegiada respecto a la oferta educativa que se estaba entregando y a las condiciones económicas y pedagógicas existentes en el sistema escolar (un número menor de personas).
- **Privatización:** De modo especial, el financiamiento vía subvención por alumno (financiamiento a la demanda) pretendía generar las condiciones necesarias para que el sector privado tuviese interés y un incentivo especial para considerar la educación como un buen negocio. A partir de estas medidas se instalaron los principios básicos del mercado en el sistema escolar: Competencia, fomento a la iniciativa privada, libertad de gestión, lucro a través de la educación. Además, se evidenciaron otras dificultades en el proceso. Por ejemplo, el traspaso de

recursos desde el Estado hacia las instituciones privadas de educación con fines de lucro no contó con adecuados sistemas de control para asegurar su correcta utilización. Asimismo, los municipios debieron suplir las deficiencias en los recursos asignados desde el nivel central de acuerdo con sus distintas posibilidades económicas. Esto aumentó las diferencias en la calidad de la educación que recibía la población en las distintas regiones y escuelas del país.

- **Flexibilización curricular:** Los cambios que se producían en el ámbito institucional y administrativo en el sistema educativo se correspondieron con la introducción de dinámicas de funcionamiento más flexibles en las propias escuelas. La reforma buscó adecuar el currículum a la realidad de sus alumnos, así como al entorno económico, social y geográfico de cada establecimiento. El currículo experimentó una flexibilización en algunos aspectos básicos: “En la facultad de los directores de las escuelas de educación básica para eliminar algunas disciplinas y reasignar horarios. En la posibilidad de que los alumnos de los últimos dos años de enseñanza secundaria pudieran elegir asignaturas al interior del ‘plan electivo’ (que se diferencia del ‘plan común’). Al no explicitarse en los planes y programas las actividades y metodologías de enseñanza, se buscó generar oportunidades para que los profesores crearan nuevas metodologías o adaptasen las antiguas según las características de sus alumnos”⁵.

En resumen, la reforma impuesta por el Gobierno Militar introdujo un financiamiento basado en el subsidio a la demanda, desafilió del estatus de funcionarios públicos al conjunto del cuerpo docente y utilizó instrumentos legales e incentivos de mercado para estimular la creación y el crecimiento de escuelas privadas con financiamiento estatal.

⁵ Espínola, Viola y de Moura Castro, Claudio (ed.) 1999 Economía política de la reforma educacional en Chile. La reforma vista por sus protagonistas (Washington DC: Banco Interamericano de Desarrollo).

Esto generó, según un estudio de la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo económico, 2004) los siguientes resultados:

- El gasto público en educación fue reducido de 7.2% del PGB (Producto Geográfico Bruto) que prevalecía en 1972, a 2.4% del PGB en 1990.
- Las escuelas públicas fueron transferidas del control del Estado a las Municipalidades.
- Los sueldos de los profesores fueron reducidos en más o menos un tercio y sus condiciones de trabajo se deterioraron significativamente.

Por otra parte, J. J. Brunner (1995) sintetiza los rasgos de la Reforma de la década del '80 de la siguiente manera:

- **Diversificación;** creación de un sistema de tres niveles (universidades, instituciones profesionales y centros para educación técnica).

- **Desregulación;** legislación nueva, permisiva, que facilita la creación de instituciones privadas con muy poca o ninguna regulación, Entre 1980 y 1990 se crearon 40 universidades privadas nuevas, 78 institutos profesionales privados y 161 centros privados para la educación técnica.

- **Descentralización:** las dos más antiguas universidades públicas (universidad de Chile y Universidad Técnica) se subdividieron en 16 nuevas universidades, incluyendo algunas pedagógicas.

- Hubo un Cambio radical en los mecanismos de **financiamiento**. Se establecieron tres fuentes de recursos: **i. Subsidios directos** limitados a las ocho universidades que existían antes de la reforma (incluyendo a las universidades católicas) y aquellas derivadas de la reforma de las universidades antiguas. **ii. Subsidios indirectos** a las instituciones públicas y privadas basados en la calidad de sus estudiantes, de acuerdo a un examen nacional; y **iii. Pago de la enseñanza**, que

se convirtió en requisito en todas las instituciones. Además el gobierno creó un sistema de préstamos a los alumnos y un fondo competitivo para la investigación, basado en la revisión mutua entre pares.

- **Reducción radical del gasto público en educación superior** (un 41% de reducción entre 1980 y 1990).

La política educativa y las acciones emprendidas desde el año 1990, tras el fin de la dictadura, estuvieron marcadas al menos por tres aspectos:

El primero y más evidente es que desde el año 1982 el Gobierno Militar venía reduciendo en forma sistemática y en grado importante el presupuesto del sector educación, al extremo que los recursos que éste le asignó al primer año de ejercicio financiero del Gobierno Democrático (1990) representaron el 72% del monto total actualizado del presupuesto del año 1982 (González, 2003).

El segundo aspecto, ligado al anterior, es que esta caída permanente de los recursos financieros implicó un deterioro sostenido de la educación, cuyos impactos demoraron en revertirse más allá de la inflexión presupuestaria que se produce a partir del año 1991.

Estos aspectos, que hoy siguen presentes, implicaron que en el año 1990, frente a las demandas internacionales definidas en las distintas conferencias mundiales de educación, nuestro país se movilizara en la búsqueda de soluciones nacionales, y se establece "La comisión Nacional de la Modernización de la Educación"(1994), la que realiza un diagnóstico de la situación educativa mucho más optimista del que realmente existía, lo que explicaría el lento progreso a la fecha en algunas dimensiones educativas que estaban profundamente deterioradas y genera las bases sobre el Proyecto de

Modernización de nuestro sistema, en torno a cinco orientaciones (Reyes, Documento web⁶):

Tabla 4.4. Orientaciones para el Proyecto de Modernización de la educación

Máxima Prioridad.	Proporcionar una formación general de calidad para todos y garantizar el acceso equitativo a la educación.
Una Tarea Impostergable.	Reformar y diversificar la educación media.
Una Condición Necesaria.	Fortalecer la profesión docente y perfeccionar el marco estatutario laboral.
Un Requisito Básico.	Otorgar mayor autonomía y flexibilidad de gestión y más información pública sobre sus resultados para tener escuelas efectivas.
Un Compromiso de la Nación.	Aumentar la inversión educacional, tanto pública como privada, junto con impulsar la modernización educacional.

A partir de este proceso, las políticas educativas se basarían en la equidad social para el desarrollo moderno del país, ampliación e igualdad de oportunidades educacionales sobre pluralismo, libertad de enseñanza y modernización cualitativa de la educación.

Se plantearon iniciativas para el pleno desarrollo del proceso, de las que surgieron las siguientes acciones:

1. Programa de mejoramiento de la Calidad de las Escuelas Básicas de sectores pobres (P-900), hoy denominado de Escuelas Focalizadas, cuya orientación es precisamente el reforzamiento del trabajo pedagógico con aquellas escuelas de más bajo rendimiento en las pruebas de medición de los cuartos años básicos (SIMCE).
2. Programa de Mejoramiento de la Calidad y Equidad de la educación Básica (MECE BÁSICA 1992 a 1997), el que estaba principalmente centrado en aportes de infraestructura, equipamiento escolar y en mejoramiento de las condiciones de

⁶ Recuperable en <http://www.monografias.com/trabajos42/reforma-educacional-chile/reforma-educacional-chile2.shtml>.

aprendizaje (salud, alimentación escolar), apoyo de textos y metodologías de enseñanza.

3. Proyecto de Mejoramiento Educativo (PME), destinados a apoyar iniciativas de enseñanza innovadoras a nivel del aula.
4. Proyecto Enlaces , destinado a incorporar la informática educativa a la escuela “el cual pasa de 55 establecimientos educacionales en el año 1994 a 183 en 1995” (Hepp, 1999) luego de un estudio realizado por el MINEDUC ante la creciente demanda de los establecimientos educacionales por contar con tecnología computacional.
5. Programa de Mejoramiento de la Calidad y Equidad de la Educación Media (MECE MEDIA).

En consecuencia, surge una vez más el concepto de Reforma Educacional, la que asentó sus bases en cuatro ejes:

- Programa de Mejoramiento, de calidad, equidad y participación.
- Renovación curricular.
- Fortalecimiento de la Profesión Docente.
- Jornada Escolar Completa Diurna (JEC).

4.3.2. Revisión de los Programas Ministeriales de esta reforma.

4.3.2.1. Decreto.

Dos son los decretos que se dictan en este período. El primero se publica en el Diario Oficial con fecha 30 de Noviembre de 1981 y el segundo es una modificación del 11 de Enero de 1984, al que no haremos referencia expresa, pues los cambios corresponden a otros campos que no repercuten en Matemáticas.

El Decreto de 1981 es el N°300, publicado por la Revista de Educación ahora a cargo del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas y cuya versión es la que aparece en el número 94 de Julio de 1985⁷.

Este número de la Revista, además de los Decretos (que también fueron revisados en el Diario Oficial), incluye los planes (Común y Electivos) y los programas de estudio de la Educación Media.

El Artículo 8° pone de manifiesto la gran autonomía que se le da al profesor para tomar decisiones. Al respecto indica:

“Los programas presentan objetivos de mediana especificidad y proponen contenidos amplios..., facilitan un trabajo escolar adaptable al aprendizaje del alumno y permiten atender a los requerimientos específicos de los estudiantes de las diferentes localidades”.

Comentaremos esto en el próximo apartado.

La calendarización de la puesta en marcha de los nuevos programas para la enseñanza media, se presenta en el artículo 16°, que reunimos en la siguiente tabla:

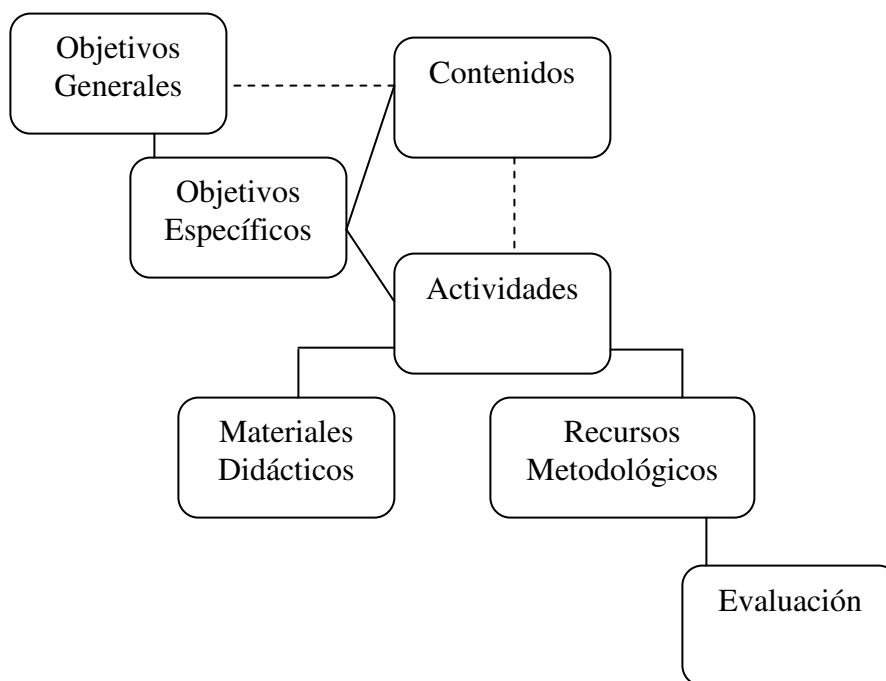
Tabla 4.5. Calendarización de la implementación del nuevo marco curricular.

Año escolar 1983	1° y 2° medio
Año escolar 1984	3° medio
Año escolar 1985	4° medio

Se indica expresamente que también existe la posibilidad de iniciar la implementación en 1982, para lo cual los establecimientos que estén en condiciones de hacerlo, sólo deben solicitarlo a la Secretaria Ministerial respectiva.

⁷ Una aclaración al respecto: Este documento transcribe fielmente el decreto y los programas publicados en 1981, con la excepción de las modificaciones que corresponden a otras áreas distintas de la Matemática, por lo que no se pone en riesgo alguno la validez externa de la investigación. Se ha procedido a revisar tal edición por motivos de accesibilidad al documento fuera del CPEIP, pero previa examinación de su contenido respecto al original.

La concepción curricular que presenta se refiere a “un desarrollo curricular bien estructurado”, como aquel que parte de objetivos generales y específicos desarrollables por los estudiantes a través de los contenidos y actividades, recursos metodológicos, uso de material didáctico y procedimientos adecuados de evaluación. Se infiere de ese modo el siguiente esquema de la planificación de clases:



4.3.2.2. Características generales de los Programas por período.

Una de las características principales de los programas en este período es la gran libertad que se le da al profesor para que realice selecciones y ajustes. Este componente aparece explícito en la fundamentación de los programas como uno de los elementos más característicos. Lo único que le ofrece cada programa es un listado de objetivos y contenidos, siendo estos últimos muy generales. Este punto es primordial, pensando en que el profesor debe administrar una transposición didáctica que se refleja mayormente en los libros de texto que utiliza, que le dan una orientación mucho mayor que la de los programas.

En la página **14 de la revista**, se indica que los programas han sido reformulados en base a las políticas educacionales instaladas y que se asume una concepción curricular centrada en la persona, lo que significa que “la educación tiene por objeto el pleno desarrollo de la persona en las distintas etapas de su vida” (Art. 19/Nº10 – Constitución Política del Estado de 1980).

Por otra parte, se entienden los programas como proposiciones acerca del cómo planificar en la escuela los procesos de aprendizaje de las diversas disciplinas del conocimiento humano en relación con los estadios de madurez personal que alcance el educando. Esto es nuevamente enfatizado en la presentación de los programas de enseñanza media, reiterando el criterio de flexibilidad de los objetivos de mediana especificidad y contenidos amplios. Se confía así con esta repetición de la característica central de los nuevos programas, en la profesionalidad del quehacer docente.

Finalmente, indica la existencia de otros criterios como el de interdisciplinariedad e integración, que suponen la posibilidad de trabajo interdisciplinario desde la perspectiva de la planificación e integrador desde la perspectiva de los diferentes aprendizajes (p.14).

4.3.2.3. Programa Seleccionado y su identificación.

A diferencia del marco curricular anterior, en que el **álgebra de radicales** aparece en el segundo año medio, ahora cambia de nivel localizándose en el 3º año del plan común. El Programa en cuestión como se ha mencionado anteriormente aparece en la Revista de Educación en 1981, sin embargo, la edición de la que haremos referencia es la Nº94 de Julio de 1985, que incorpora modificaciones que (insistimos) no alteran la sección de matemáticas. Cuenta con 180 páginas de las cuales de la 127 a la 130 lo dedica al programa de matemáticas para 3º medio que examinaremos. Cabe señalar que

sólo la página 129 contiene al programa completo, el que sólo está conformado por un grueso listado de objetivos y contenidos. Este es el motivo por el que el programa completo se extiende tan escasamente, lo que origina grandes diferencias con el programa de la reforma actual.

4.3.2.4. Secciones del Programa.

En rigor, la revista presenta los programas por ciclos, esto es, el primer ciclo de enseñanza media conformado por el 1° y 2° año y el segundo ciclo por el 3° y 4° año. En la página 128, parte con una introducción general que presenta los programas de 3° y 4° año como uno sólo (actuando por ciclos se subentiende), y por lo mismo, se acompaña de “Objetivos Generales de la Asignatura de Matemática en la Educación Media” y “Objetivos Generales de la Asignatura de Matemática en el Segundo Ciclo de la Educación Media”, los cuales se repiten en la sección destinada a los programas del plan electivo de Matemáticas.

- En tanto, las secciones de la única página 129 en que se desarrolla el programa, son:
 - Unidad I.
 - Objetivos Específicos.
 - Contenidos.
 - Unidad II.
 - Objetivos Específicos.
 - Contenidos.

4.3.2.5. Referencias Bibliográficas del Programa.

Por la estructura que ya se ha comentado, las referencias bibliográficas son para el segundo ciclo medio en general. Teniendo esto en cuenta, las 19 referencias son:

- 1) Allendoerfer Y. Oakley, “Fundamentos de las Matemáticas Universitarias”. Editorial de Ediciones del Castillo, S.A. Madrid, 1966. Traducción.
- 2) Ayres, Frank. “Álgebra Moderna”. Bogotá. Mc Graw – Hill, 1969. (Serie Schaum’s).
- 3) Coxeter, H.S.M. “Fundamentos de la Geometría”. México. Limunsa - Wiley, México, 1971.
- 4) Dolciani y otros. “Álgebra Moderna”. México. Publicaciones Cultural, 1967. 2v.
- 5) Eves, H. “Estudio de las Geometrías”. México, UTEHA, 1968. 2v.
- 6) Hall y Knight. “Álgebra Elemental”. Barcelona, Montaner y Simon, 1968.
- 7) Keedy – Nelson. “Geometría, una moderna introducción”. México, CECSA, 1968.
- 8) Lehmann, Charles. “Álgebra”. México, Limusa – Wiley, 1964.
- 9) Lipschutz, Seymour. “Probabilidad”. Bogotá. Mc Graw – Hill, 1971. (Serie Schaum’s).
- 10) Moise – Downs. “Geometría Moderna”. Reading, Mass. Adisson – Wesley, 1966.
- 11) Nichols, Eugene. “Matemáticas”. México. Interamericana, 1977.
- 12) Robledo, Alamiro. “Lecciones de Álgebra Elemental”. Santiago. Universitaria, 1973. 3v.
- 13) Rojo, Armando. “Álgebra”. Buenos Aires. El Ateneo, 1975. 2v.
- 14) Taylor - Wade, “Matemáticas Básicas”. Editorial Limunsa - Willey, México, 1966.
- 15) Trejo, Cesar. “El concepto de Número”. (Monografía N°7, Serie de Matemática). Washington, Depto. De Asuntos Científicos. O.E.A. 1968.
- 16) UNESCO. “Las aplicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela secundaria”. Informe de reunión. Uruguay, 8 al 17 de agosto de 1974, Montevideo, 1974.
- 17) UNESCO. “Los Módulos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela secundaria”. Informe de reunión. Uruguay, 29 de noviembre al 5 de diciembre de 1976, Montevideo, 1976.
- 18) Wilougheby, Stephens. “Probabilidad y Estadística”. México. Publicaciones Cultural, 1969.
- 19) Wylie, C.R. “Fundamentos de Geometría”. Buenos Aires. Troquel, 1968.

De ellas, cabe hacer los siguientes **comentarios**:

- La obra que hemos numerado (6), es parte del catastro bibliográfico de la muestra de los libros de texto en esta investigación. Pese a ser un libro de texto internacional, y a estar recomendado para este período, el clasificarlo en el período anterior (1969 - 1980), se justifica por el año de su edición y el uso que ya de antes a los

años 80' tenía (según la consulta a expertos), sin por ello desconocer que los libros de texto trascienden a su época.

- Centrándonos sólo en las referencias ligadas al álgebra, que hemos destacado con negrita, 6 de las 9 tienen su fecha de publicación en la década de los 60' y se observa en la totalidad de las obras una fuerte influencia aún del paradigma de las matemáticas modernas. Muy pocos son los libros que escapan a este enfoque, como el (6) y el (8).

- Se ha revisado esta bibliografía y se encontró que sus presentaciones de contenido son de tipo formalista o axiomático – deductiva, orientado a las definiciones, los teoremas con ejemplos y demostraciones.

- Este listado en definitiva, hace entrever que a nivel Oficial, la concepción de las matemáticas que aquí se tiene se inclina por un **estructuralismo heredado** de la reforma de las matemáticas modernas aún no superado, y que tal como ocurrió en la mayoría de los países, las transacciones de éxito con los estudiantes se redujeron a largos listados de ejercicios y de extensos desarrollos con operaciones combinadas excesivamente, como algunas de estas obras lo ofrece, en particular el (6), texto reconocido por su alto grado de complejidad⁸.

4.3.2.6. Lugar Oficial del Álgebra de Radicales en el Saber matemático a Enseñar.

Es en **tercer año medio** cuando se presenta el álgebra de radicales como objeto de estudio. En Primero medio, sólo hay una aproximación aritmética como extracción de raíz, especialmente cuadrada por métodos de aproximación numérica. Por tanto, nos centraremos en el tercer año como ya hemos dicho.

⁸ Entiéndase distinto de grado de dificultad.

En este nivel, aparecen dos unidades de estudio; uno para álgebra y otro para geometría. La Unidad I se denomina Raíces y Ecuaciones de segundo grado, título que explicita la ecología en que están insertos los radicales en cuanto a su tratamiento algebraico. También del título es posible advertir que se utiliza el término “Raíces” como Saber a Enseñar y no como Radicales.

4.3.2.7. Propósitos explicitados de los tópicos relacionados con los Radicales.

Los propósitos están descritos en términos de objetivos generales y otros específicos en la formulación tradicional “conducta + contenido” del modelo bidimensional de Tyler de los años 60’ e impuesto como moda en la formulación de objetivos, incluso con el predominio de la taxonomía de Bloom.

Los objetivos generales relacionados con la Unidad de Álgebra en que se tratan los radicales, son dos:

4. Comprender y aplicar las propiedades fundamentales de las operaciones con número reales, que le faciliten la descripción de relaciones, el análisis de situaciones y el planteo y resolución de problemas.
5. Comprender y aplicar las ecuaciones de segundo grado en la solución de problemas verbales propios de la matemática y de otras ciencias, que le permitan interpretar enunciados y comunicar resultados en forma clara y precisa.

No daremos hasta aquí un comentario de estos objetivos generales sin acompañarlos de los respectivos objetivos específicos que declaran, para así dar una mejor interpretación de lo que allí se pretende comunicar.

El Prema con el que aparecen redactados los objetivos específicos es: “El alumno desarrollará sus capacidades para...” al cabo del cual para la unidad que nos interesa, expresa:

- Resolver ejercicios de multiplicación y división de potencias de base real positiva y exponente racional.
- Aplicar las ecuaciones de segundo grado en la solución de problemas diversos.

Se observa que las operaciones a las que se hace referencia son las que precisan las potencias en su estado más amplio de base real positiva y exponente racional. Aquí se toma la opción en correcta correspondencia con el saber matemático, de usar sólo bases positivas, lo que es necesario posteriormente para articular las potencias con la función exponencial. Sin embargo, este objetivo específico es demasiado particular respecto de lo mencionado en el primer objetivo general, que haciendo énfasis en la comprensión de las propiedades fundamentales de las operaciones con **números reales**, no hay ningún objetivo específico que mencione al menos que se hacen cargo del uso de las representaciones de los números reales, en especial, de su notación de potencia y su relación con la radical y en definitiva por qué hay que definir las potencias de exponente racional no entero tomando bases positivas.

El segundo objetivo general que se operacionaliza con el único objetivo específico que le corresponde, sitúa las ecuaciones de segundo grado como herramienta y no hay ningún tipo de indicación acerca de sus modelos de resolución, del concepto de raíz de una ecuación, y de la diferencia entre raíz y radical.

En síntesis, los objetivos generales son demasiado amplios, desembocan en objetivos específicos insuficientes para interpretarlos y dejan entonces a los autores de libros de texto y a los profesores con esa amplia libertad de toma de decisiones que promulgan como característica curricular. Se menciona la resolución de problemas de modo amplio y no hay objetivos respecto a los radicales y su tratamiento. Por lo mismo, se infiere que se desea dar las justificaciones o demostraciones de propiedades de los radicales (o su álgebra como hemos definido en esta investigación) en base a las propiedades de las potencias, lo que incurre en el error lógico – secuencial de demostrar utilizando extensiones de teoremas que no han sido probados en nuevos contextos.

Rescatable si es la mención expresa que hacen del dominio de validez para las potencias de exponente racional, enfatizando en la base positiva de la potencia, que concuerda con el Saber matemático de referencia, pero esto es muy probable que se pierda por la carencia de orientaciones en el programa o de otros objetivos que se ocupen de esto.

4.3.2.8. Organización de los contenidos.

Los contenidos se organizan en dos Unidades:

- Unidad I: Raíces y Ecuaciones de segundo grado.
- Unidad II: Proporcionalidad y Semejanza.

La Unidad I, luego de presentar sus objetivos ya descritos en el apartado anterior, se desglosa con el siguiente listado de contenidos en dos bloques:

Primer bloque de contenidos:

Concepto de raíz enésima de un número real positivo.

- Propiedades de las raíces.
- Potencias de base real positiva y exponente racional.
- Multiplicación y división de raíces.
- Racionalización de denominadores.

Segundo bloque de contenidos:

- La Función de segundo grado y su gráfico.
- Ceros de una función cuadrática.
- La ecuación de segundo grado; métodos de resolución.
- Propiedades de las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática.
- Coordenadas del vértice de una parábola.

- Ecuaciones Irracionales reducibles a ecuaciones de primer y segundo grado.

Según este listado, que no da ningún desarrollo o sugerencia de su tratamiento, se observa que usa el término “raíces” para referirse a los radicales, que se parte de lo general (raíz enésima) para llegar al estudio de los casos particulares (cuadrada, cúbica, etc.). El primer contenido informa al mismo tiempo, del concepto de raíz enésima restringido a los números reales positivos, lo que hace suponer que en realidad, está mencionando el concepto de radical enésimo o bien de raíz aritmética. Nótese que no incorpora la extensión $\sqrt[n]{0} = 0$.

Otro elemento que se advierte es la relación que luego indica en el tercer contenido, donde establece la notación de potencia de los radicales, con la correcta restricción a los reales positivos. Sin embargo, nada de esto, dice con respecto a la concepción errónea del doble signo. En torno a los teoremas, aparecen explícitos vagamente los referidos a multiplicación y división de raíces, (habría que preguntarse raíces de qué, por lo pronto) pero no se especifica su del mismo o distinto orden.

Se trabaja sólo la **racionalización de los denominadores**, y ninguna justificación aparece respecto de esta decisión, en que no se trabaje la racionalización de numeradores.

4.3.2.9. Orientaciones explicitadas acerca de los radicales.

no hay información

4.3.2.10. Actividades o ejemplos propuestos.

no hay información

4.4. La Reforma Educacional de 1996.

4.4.1. Contexto socio – político y educacional.

En el caso de esta Reforma Educacional, aparece como antecedente inmediato una política educacional que se comienza a implementar en marzo de 1990 (mencionada anteriormente), mientras la educación chilena vive la confluencia de dos corrientes culturales que dan lugar a una circunstancia especial: Por una parte, se viven los días en que se realiza la conferencia Mundial de la Educación para Todos – primer gran evento que da cuenta de un cambio de ubicación de la educación en el mundo — y por otro, para Chile es el momento de restauración de la democracia, luego de 17 años de dictadura militar.

Durante la década de los noventa, surge a nivel mundial una revalorización de la educación que posee estrecha relación con los cambios históricos de este fin de siglo, los que se han descrito como **el paso de una sociedad industrial a una sociedad del conocimiento**. Sociedad globalizada y dinamizada por la expansión y centralidad creciente que posee en ella la utilización del conocimiento, facilitada por el rápido despliegue a nivel mundial de las modernas tecnologías de la información y la comunicación.

El discurso acerca del valor de la educación para el desarrollo de la sociedad y de la economía no es nuevo, la perspectiva innovadora en este aspecto es que “la educación comienza a ser el desarrollo”.

Es así como, esta nueva Reforma en Chile, se comienza a impulsar desde el año 1995 y tiene como misión **desencadenar mecanismos y mejorar en forma incremental las prácticas docentes y de gestión pedagógica, en las salas de clase y en los establecimientos** (MINEDUC, 1997). Para ello, se establecieron ejes orientadores

del proceso, los que se centran en: Programas de Mejoramiento, de calidad, equidad y participación; Renovación curricular, Fortalecimiento de la Profesión Docente e implementación de la Jornada Escolar Completa Diurna (JEC). Una de las orientaciones fundamentales de la Reforma corresponde a la descentralización educacional (facultar a las escuelas para administrar, gestionar y adoptar decisiones relacionadas con materias curriculares, tales como planes, programas, textos etc.), mientras que otra es generar la disposición al cambio permanente. Para dar paso a los cambios, se han establecido ejes direccionales que son descritos por el MINEDUC de la siguiente forma:

a) Las políticas centradas en la calidad implican el paso de un foco en los insumos de la educación a uno en los procesos y **resultados de aprendizaje**.

b) De un concepto de equidad como provisión de una educación homogénea en términos nacionales, la equidad como provisión de una educación sensible a las diferencias y que discrimina en favor de los grupos más vulnerables.

c) De regulaciones exclusivamente burocrático - administrativas del sistema, a énfasis en regulaciones por incentivos, información y evaluación.

d) De instituciones relativamente cerradas respecto a los requerimientos de su sociedad, referidas prioritariamente a su auto - sustentación y controladas por sus practicantes y su burocracia, a instituciones abiertas a las demandas de su sociedad e interconectadas entre ellas y con otros ámbitos o campos institucionales.

e) De políticas de cambio vía reformas integrales, y un concepto de planeamiento lineal, a estrategias diferenciadas y un concepto de cambio incremental basado en el despliegue de la capacidad de iniciativa de las escuelas y no en una receta metodológica o curricular determinada.

f) De una ausencia de políticas estratégicas de Estado, o su subordinación a presiones particularistas externas e internas, a políticas estratégicas definidas nacionalmente, con consenso de actores y diferenciación y combinación de medios.

El núcleo sustantivo de la Reforma es quién modifica, el qué y el cómo se enseña y se aprende, enfatizando dos vectores: Equidad (obedece al principio de igualdad de oportunidades) y calidad. Desde esta perspectiva la Reforma debería generar una gama de egresados con perfiles diferentes y además con competencias, habilidades y aptitudes variables y superiores respecto de las que en la actualidad se generan.

Con la Reforma Educacional surge una excelente oportunidad para apoyar a este nivel de educación regular, ya sea en los liceos de anticipación (Montegrando), los cursos para profesores de la reforma (NB3), en la formación inicial o en otras estrategias del MECE, con el fin de revisar prácticas pedagógicas e incorporar mayor información del proceso de medición, analizando los resultados alcanzados en series de tiempo de los distintos planteles de educación media.

Por otra parte, la Reforma Educacional es muy importante para la enseñanza Media, pues le permite consolidar sus proyectos educativos, enfatizando procesos de formación de largo alcance que sobrepasen las restricciones de cualquier sistema de selección. En este plano, más que considerar cualquier sistema de selección que se pueda implantar, **su accionar debe dirigirse a la calidad de su formación y al desempeño de sus egresados**, materia que le protege de cualquier transformación del sistema de selección y no le hace entrar en crisis de significación.

Como se observó en un comienzo, es a partir de 1990 que se establecen las primeras pistas hacia el cambio, por lo que se comienzan a desarrollar gradualmente los Programas de Mejoramiento de la educación preescolar, básica y media; se elabora e

implementa el Estatuto docente; se desarrollan planes para mejorar la gestión escolar y municipal; y se eleva drásticamente el gasto en educación.

Posteriormente, desde 1996, a esta dinámica de transformaciones profundas de las condiciones y los procesos educativos se le da el nombre de **Reforma Educativa**, dados la multidimensionalidad y complejidad de la agenda de transformaciones en curso, sumándose, además, un nuevo impulso para el fortalecimiento de la profesión docente, las reformas curriculares de básica y media, así como la extensión de la jornada escolar.

La Reforma Educativa se caracteriza por ser gradual, incremental y producida desde la base del sistema, es decir, desde las escuelas y liceos. Tras ello hay una concepción de la transformación y adecuación de los sistemas educativos a las cambiantes condiciones de la sociedad. Es propio de los sistemas descentralizados el ritmo de adaptación incremental y continuo que implica un sistema educativo abierto a la sociedad, con múltiples puntos de contacto con ella y, a la vez, flexible para adaptarse a los cambios. Esta concepción de reforma no tiene, por lo tanto, un solo y exclusivo hito que permita identificarla como tal, sino que es micro - social y su avance depende también de las capacidades crecientes que desarrollen sus actores para llevarla a cabo.

En definitiva, es una Reforma que pretende afectar paulatina y en forma global todas las dimensiones del sistema: Las formas de enseñar y aprender, los contenidos de la educación, la gestión de los servicios educativos, los insumos: Tanto de materiales educativos (biblioteca, informática educativa) como de infraestructura escolar, el financiamiento del sector, así como el mejoramiento sostenido de las condiciones de trabajo de los docentes, principales artífices y protagonistas de la Reforma.

En resumen, entre 1996 y 2002, el sistema escolar chileno vivió una de las más importantes reformas curriculares de los últimos 25 años, la que implementó cambios en las siguientes áreas:

Descentralización. Las unidades educacionales pueden formular sus propios programas de estudio.

Estructura curricular general. Estructurado en torno a la distinción entre educación general y especializada:

- En los primeros dos años de Enseñanza Media (1° y 2° Año Medio), todos los estudiantes comparten un currículum común, ya sea que asistan a un establecimiento Académico o Técnico – Profesional. La decisión respecto a continuar en una u otra modalidad, situación que antiguamente se enfrentaba a fines de 8° Año Básico (a los 14 años aproximadamente), se toma ahora dos años más tarde, es decir, a los 16 años.
- En la modalidad Académica (o Científico – Humanista), aproximadamente dos terceras partes del tiempo le dedican a la educación general. En cambio, en la modalidad Técnico – Profesional, se le dedica cerca de dos terceras partes del tiempo a la educación especializada. En esta última, se imparten 46 especialidades diferentes, organizadas en 14 sectores económicos o grupos ocupacionales (en contraste con las más de 400 especialidades disponibles antes de la reforma). La educación especializada, dentro de la modalidad académica, requiere que parte del plan de estudios de los alumnos sea dedicado a una combinación de cursos (no menos de dos y no más de cuatro), elegidos por los mismos alumnos de acuerdo a sus intereses personales.

Organización curricular Reorganización de contenidos científicos y la introducción de temas multidisciplinarios transversales, los que incluyen temas

relacionados con valores y habilidades; la inclusión de la informática educativa y un idioma extranjero.

Los contenidos y enfoques. Se dan cambios al interior de las materias: 1.- Cambio de un énfasis de los contenidos a un énfasis en habilidades o competencias. // 2.- Actualización y enriquecimiento de las materias, o exigencia de estándares de logro más altos en ellas; // 3.-Relevancia del curriculum en conexión con la vida de los estudiantes.// Las habilidades que se enfatizan en este nuevo curriculum incluyen: capacidad para la abstracción, pensamiento sistémico, experimentación y aprender a aprender, comunicación y trabajo colaborativo, resolución de problemas, manejo de incertidumbre y adaptación al cambio.

1. **Valores.** El nuevo curriculum tiene por objetivo que los estudiantes comprendan la complejidad y tensiones inevitables entre derechos y responsabilidades, colaboración y competencia, **globalización e identidad cultural, y escepticismo.**
2. **Jornada Escolar Completa.** En 1996 se extendió la jornada escolar sobre la base de requisitos de calidad. Existe una estrecha vinculación entre el factor tiempo y el aprendizaje en contextos socialmente vulnerables.

En 1992 el Ministro de Educación estableció Enlaces como una agencia para promover las TIC's (alianza estratégica entre ministerio de educación y 24 universidades encabezada por la U de la Frontera). Y en 1995 se creó la Comisión Nacional de Modernización de la Educación.

Después del año 1997 Chile volvió a ser miembro de la **International Association for the Evaluation of educational Achievement (IEA)**, ya que lo había sido a comienzos de la década de los '70 y desde entonces ha participado en las

mediciones TIMSS 1999 y Civics 2000, así como en el estudio SITES de esa organización sobre informática en Educación. Participó en las mediciones TIMSS (2003) y en el estudio PISA, de la OCDE. Durante ese mismo año, la Ley extiende la educación obligatoria a 12 años para todos los estudiantes, es decir, Enseñanza Básica y Media completas, y la Comisión Técnica Tripartita, integrada por el Ministerio, las Municipalidades y el Colegio de Profesores, acuerdan un sistema de Evaluación Docente.

Por último, se distribuyeron durante el año 2003 más de doce millones y medio de textos y el adelante esta cifra se mejora año a año.

4.4.2. Revisión de los Programas Ministeriales para esta reforma.

4.4.2.1. Decreto.

Por medio del **Decreto Supremo de Educación N° 220**, publicado en el Diario Oficial el 18 de Mayo de 1998, se establecen los objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios (CMO), para la Enseñanza Media y fija normas generales para su aplicación. En este decreto, se indica la existencia previa del Decreto N° 40 análogo de 1996 para el ciclo de la Enseñanza Básica, y cuyos programas son puestos en marcha con anterioridad al del ciclo de la secundaria.

Se promulga en el artículo 3° que los nuevos programas para el primer año de enseñanza media, serán elaborados a más tardar el 10 de agosto de 1998 y a más tardar el 10 de agosto de cada uno de los años inmediatamente posteriores, los correspondientes a los respectivos cursos siguientes de la enseñanza media.

Es así como en el artículo 4° se entrega la calendarización de la puesta en marcha de los nuevos programas oficiales en los establecimientos del país. La aplicación de tales programas es la siguiente:

Tabla 4.6. Calendarización de la implementación del nuevo marco curricular.

Año escolar 1999	1° medio
Año escolar 2000	2° medio
Año escolar 2001	3° medio
Año escolar 2002	4° medio

Esta calendarización justifica que los libros de textos que se analizan en este período en los apartados posteriores, estén delimitados entre los años 2001 y 2009. En el artículo 10° en tanto, se hace mención a la obligatoriedad de la aplicación de los programas oficiales del Ministerio de Educación, **siempre y cuando los establecimientos sea que no presenten o bien no tengan aceptado por esta entidad gubernamental, programas que le sean propios**. Por otra parte, de aquellos establecimientos que cuenten con tal aceptación, se infiere que para contar con ella, sus programas cumplen con la base de los CMO y de los OFT planteados por el MINEDUC⁹.

El artículo 12° deroga en conformidad de la vigencia de este Decreto, y en razón de la calendarización del artículo 4° los Decretos Supremos Exentos N°300 de 1981 y N°130 de 1988. En especial, vemos que la modificación curricular propuesta en 1981 termina entonces con el nuevo marco el año 2001, para los propósitos de esta investigación, pues, es en ese año, como se verá en la siguiente matriz, que aparece el estudio del álgebra de radicales en el nivel del 3° año medio.

⁹ Este hecho no desvía esta investigación, pues, se trata de considerar los CMO que deben estar asegurados como requisito indispensable para todos los estudiantes del país, sea en programas propios de cada establecimiento o bien como ocurre con la mayoría, tomados oficialmente.

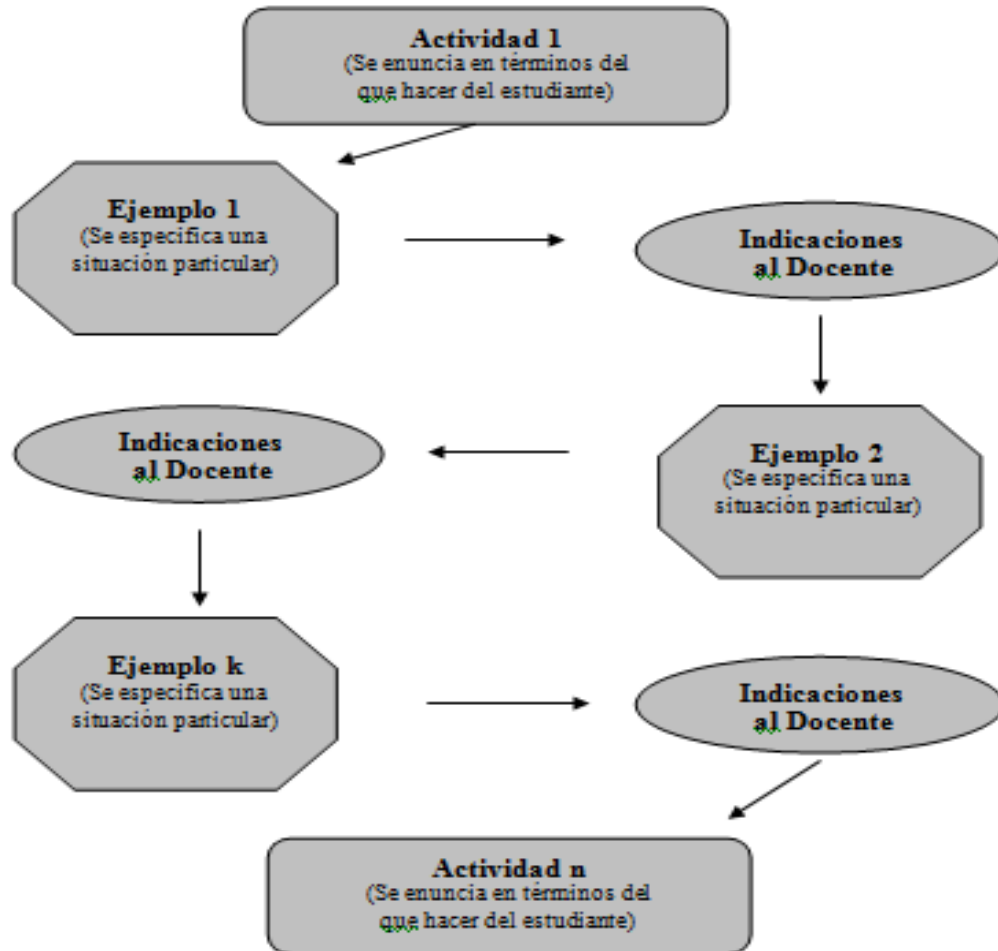
También es necesario indicar que uno de los cambios que se producen, está en el plan de estudios¹⁰, el que propone cursos de formación general para los dos primeros años de la enseñanza media y cursos de formación diferenciada, que en el caso de la educación Humanístico – Científica, en el área de Matemáticas, incorpora dos nuevos programas: Uno para tercer año: Álgebra y Modelos Analíticos, y otro para cuarto año: Funciones y Procesos Infinitos.

4.4.2.2. Características Generales de los Programas Oficiales del Período.

Los programas de estudio en este período son verdaderos manuales del quehacer del profesor. A gran diferencia de sus antecesores, estos documentos además de los propósitos (que vienen en términos de aprendizajes esperados), los contenidos, la bibliografía y orientaciones metodológicas, incorpora un ingrediente que le da un valor singular: La serie de actividades sugeridas algunas para desarrollo y otras para la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes. Esto es común en todos los programas de 1° básico a 4° año medio. El formato en que se presentan las actividades de desarrollo es el siguiente:

¹⁰ Definido como el documento de carácter normativo que señala para cada curso, los sectores, subsectores de aprendizaje o las asignaturas con indicación de la carga horaria semanal. (Decreto N°220, MINEDUC)

Esquema del formato de las actividades genéricas propuestas por los Programas ministeriales.



(Se repite el ciclo anterior).

Luego de esta serie de actividades, ofrece otro conjunto para la evaluación, las que siguen la secuencia: Actividad – Ejemplo, seguido en cada caso de indicadores que descomponen la actividad en partes, de modo que el docente sepa qué observar para la evaluación de los aprendizajes.

4.4.2.3. Programa Seleccionado y su identificación.

Revisando los diversos programas de la enseñanza media, se encontró que el tratamiento algebraico de los radicales se sitúa en dos programas: El de Matemáticas para tercer año medio, de formación general, y el Álgebra y Modelos Analíticos del mismo nivel pero de formación diferenciada. Para efectos de análisis, describiremos estratégicamente ambos marcos, como sigue.

1. Programa de Matemáticas NM3 para formación general.

Aparece publicado en su primera edición en Octubre de 2000 para ser aplicado en 2001. Consta de 127 páginas y se distribuye en formatos de papel, en formato digital (en CD) y también puede bajarse en forma gratuita y directamente del sitio web del MINEDUC. Por tal motivo, está fácilmente al alcance de los profesores.

2. Programa de Álgebra y Modelos Analíticos NM3 para formación diferenciada.

Aparece publicado en su primera edición en Octubre de 2002 para ser aplicado en 2002. Consta de 87 páginas y se distribuye en formatos de papel, en formato digital (en CD) y también puede bajarse en forma gratuita y directamente del sitio web del MINEDUC, siendo de fácil acceso para los profesores.

4.4.2.4. Secciones del Programa.

En todos los programas correspondientes a la reforma de 1996 de enseñanza media, traen el mismo formato. Sus secciones son las siguientes:

- Presentación.
- Objetivos fundamentales transversales y su presencia en el programa.
- Objetivos fundamentales.

- Cuadro sinóptico de las unidades, contenidos y distribución temporal.
- Unidades.

Cada unidad se desarrolla en relación a dos secciones:

- Actividades para el aprendizaje y ejemplos.
- Actividades para la evaluación y ejemplos.
- Bibliografía.

4.4.2.5. Referencias Bibliográficas del Programa.

A) Bibliografía del Programa de NM3 Matemáticas plan común.

Camous, Henri, (1995). Problemas y juegos con la matemática. Editorial Gedisa, España.	Enlaces: (http://www.enlaces.cl)
Freund, G. y Simon, G., (1997). Estadística elemental. Prentice Hall Hispanoamericana, México.	Mensa España. Colección de juegos de ingenio de Ciudad Futura: http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa
Guzmán, Miguel de, (1995). Para pensar mejor. Ediciones Pirámide. España.	Departamento de Ingeniería Matemática de la Facultad de ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile:
Díaz Godino, J. y otros, (1996). Azar y probabilidad. Editorial Síntesis, España.	http://www.dim.uchile.cl/
Olimpiada matemática argentina. Red Olímpica. Edipubli. S.A. Argentina, (1995).	Problemas de matemáticas: http://www.nalejandria.com/forms/matemas.htm
Perero, Mariano, (1994). Historia e Historias de matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, México.	Sociedad de Matemática de Chile: http://www.mat.puc.cl/~socmat
Rey, J. y Babini, J., (1997). Historia de la matemática. Editorial Gedisa, España.	Real Sociedad Matemática Española: http://rsme.uned.es
Rodríguez, José y otros, (1995). Razonamiento matemático. Internacional Thompson Editores, México.	ICMI-Chile. Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, USACH: http://fermat.usach.cl/~somachi/index.html

Smullyan Raymond, Satan, (1995). Cantor y el infinito. Editorial Gedisa, España.	Problemas relativos a superficie: http://roble.pntic.mec.es/~jcamara/websupl.htm
Software graficador shareware bajado de Internet EQUATION GRAPHER.: http://www.mfsoft.com/equationgrapher/ 'Graphmatica' bajado de internet: http://download.cnet.com/	Matemáticas: Historia, documentación, actividades y problemas, y proyectos http://nti.educa.rcanaria.es/usr/matematicas El Paraíso de las Matemáticas: http://members.xoom.com/pmatematicas
Direcciones internet (Es posible que algunas direcciones hayan dejado de existir o se modifiquen después de la publicación de este programa).	Instituto Nacional de Estadística: http://www.ine.cl/ Historia de la matemática y biografías: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/

B) Bibliografía del Programa de Álgebra y Modelos Analíticos. Plan Diferenciado.

Camous Henri, Problemas y juegos con la matemática. Editorial Gedisa, España, 1995.	Perero Mariano Historia e historias de matemáticas, Grupo Editorial Iberoamericana, México 1994.
Freund, G. y Simon, G., Estadística elemental, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1997.	Rey J. y Babini J. Historia de la matemática, Editorial Gedisa, España, 1997.
Guzmán, Miguel de, Para pensar mejor. Ediciones Pirámide. España, 1995.	Rodríguez, José y otros. Razonamiento matemático. Internacional Thompson Editores, México 1995.
J. Diaz Godino y otros, Azar y probabilidad, Editorial Síntesis, España, 1996.	Smullyan Raymond, Satan. Cantor y el infinito. Editorial Gedisa, España, 1995.
Jhon Allen Paulos, Mas allá de los números, Turquets Editores, Barcelona, 1991.	Software graficador shareware bajado de Internet EQUATION GRAPHER.: http://www.mfsoft.com/equationgrapher/ 'Graphmatica' bajado de internet: http://download.cnet.com/
Lehman, Geometría Analítica, Editorial Itesa, México, 1987.	
Olimpiada matemática argentina, Red Olimpica, Edipubli. S.A. Argentina, 1995.	

En ambos programas no se observa una fuerte presencia de bibliografía que se oriente en la línea de **Didáctica de la Matemática** o al menos que permita ayudar al profesor respecto del tratamiento de los contenidos involucrados como Saber a Enseñar oficial. Son muy pocos al respecto, y el énfasis se pone en referencias relacionadas con algunos libros de juegos y actividades lúdicas como también de divulgación. Con la llegada de INTERNET, los programas además suelen incluir en sus referencias, direcciones web, las que también comentaremos respecto del tipo de ayuda que le pueda brindar al docente, sobretodo en el contenido del cual versa esta tesis.

Tabla XX Comparación entre la bibliografía de los programas de formación común y diferenciada en Matemáticas.

En el Programa de Matemática NM3 formación general	En el Programa de Álgebra y Modelos Analíticos NM3, formación diferenciada
<ul style="list-style-type: none"> • Consta de nueve referencias a libros, dos software para la gráfica y su obtención de la Red y doce sitios web. • De los nueve libros, dos son de contenido matemático, de los cuáles 1 solamente es de matemáticas generales donde el profesor podría informarse del tratamiento de los radicales, pues el otro es un libro de estadística. • Dos corresponden a la temática de juegos y olimpiadas, cuatro son de divulgación y sólo 1 “Azar y Probabilidad” es de Didáctica de la Matemática, de Godino y otros. Ver anexos. • Dentro de los doce sitios web, dos de ellos son direcciones de páginas gubernamentales, (Enlaces e INE), seis son de actividades lúdicas e historia de la matemática, dos son de páginas de los centros matemáticos de Universidades chilenas y dos de Sociedades de Matemáticas (la de Chile (SOMACHI) y la otra de España), y por tanto, no hay referencia alguna a sitios web de instituciones o sociedades ligadas a la Educación Matemática. 	<ul style="list-style-type: none"> • Consta de once referencias a libros, dos software para la gráfica y su obtención de la Red y llama la atención que además sean exactamente los mismos doce sitios web que recomienda el programa de formación general, lo que claramente no corresponde aún al observar que no hay coherencia por la diferencia de contenidos. Esto hace entrever que al docente se le da un conjunto de referencias muy generales y por tanto a nivel ministerial no se da la especificidad necesaria para que el profesor tenga una mínima noción de sitios recomendables para la preparación de sus clases. • En cuanto a los once libros, están los nueve del programa de Matemática de formación general, y sólo se agregan dos, uno de John Allen Paulos “más allá de los números” que corresponde a una obra de divulgación y el clásico “Geometría Analítica” de G. Lehmann, que se relaciona con una de las tres unidades del programa.

En síntesis, se observa una profunda carencia en referencias relacionadas con el tratamiento de contenidos o que le permitan además, acceder al saber erudito, reflexionar sobre los contenidos, en particular ninguno ofrece esta posibilidad para el álgebra de radicales.

Llama también la atención que se recomienden los mismos libros y páginas web para dos cursos que tienen contenidos que son diferentes y otros al menos en su profundidad. No se ofrecen alternativas de información. Una consecuencia de esto, puede ser que el docente siga aferrándose al material que utiliza cuando fue estudiante o bien que cree es el mejor por motivos de trascendencia y mayor uso, marketing o simple gusto o acomodo a sus nociones matemáticas.

4.4.2.6. Lugar Oficial del Álgebra de Radicales en el Saber Matemático a Enseñar.

La Radicación se encuentra algebraicamente tratada en los programas ministeriales del Nivel Medio 3 (NM3), esto es, del tercer año de enseñanza media y se ubica tanto en el programa del plan común como del plan diferenciado. En este último, el estudio es en detalle, tanto en el plan común como en el plan diferenciado.

Como hemos señalado en el apartado 3.3.3., el estudio del programa oficial para este tercer período abarcará una mayor extensión, puesto que la información es mucho mayor y detallada, al existir programas que no sólo contienen listados de contenidos y aprendizajes esperados¹¹, sino que a su vez incorpora un elemento que es fundamental para esta investigación: las actividades genéricas que propone. Éstas dan la orientación de lo que se desea a nivel país, y cada actividad viene acompañada de comentarios y sugerencias acerca de qué debe observar el docente en su práctica. Con el propósito de

¹¹ Los aprendizajes esperados son una nueva forma de expresar los objetivos, desde un enfoque que enfatiza lo esperable y por tanto levanta la importancia de los procesos, y no solo en productos.

hacer un análisis específico que permita describir y caracterizar la información, se desarrollarán dichas actividades, que sólo están propuestas en los documentos oficiales.

Para conocer mejor cuál es el recorrido de los radicales hasta que llegan a trabajarse algebraicamente en este período, se ha revisado además otros programas de los que damos cuenta a continuación en que aparece nuestro objeto de estudio, sin embargo, insistimos que éste recorrido nos permitirá sólo una orientación de la organización del Saber a Enseñar, siendo el programa de NM3 el que abordaremos con detención, pues es ahí donde el álgebra de radicales tiene su lugar oficial en este período.

4.4.2.7. Propósitos explicitados de los tópicos relacionados con los radicales.

Los propósitos se describen en términos de Aprendizajes Esperados. De los que se plantean en página 17 del programa, destacamos tres que están ligados a esta investigación:

Aprendizajes esperados.

Los alumnos y alumnas:

1. Conocen y utilizan procedimientos de cálculo algebraico con expresiones en las que intervienen raíces cuadradas y cúbicas.
2. Plantean y resuelven problemas que involucran ecuaciones de segundo grado; explicitan sus procedimientos de solución y analizan la existencia y pertinencia de las soluciones obtenidas.
3. Analizan la función cuadrática y la función raíz cuadrada en el marco de la modelación de algunos fenómenos sencillos, con las correspondientes restricciones en los valores de la variable; reconocen limitaciones de estos modelos y su capacidad de predicción.

Algunos comentarios:

1. Se observa que el programa conceptualiza el radical como raíz, al hablar de “cálculo con raíces cuadradas y cúbicas”. La presentación es inductiva, pues parte de lo particular para llegar a lo general, aunque explicita sólo los órdenes 2 y 3 para el radical en cuestión. Se supone que al hablar de cálculo algebraico, se está refiriendo a los teoremas del álgebra de radicales y no se aprecian aprendizajes

esperados específicos respecto de cuáles son los teoremas a los que hace referencia.

2. Aparece la ecuación de segundo grado, y en la redacción del aprendizaje esperado respectivo, menciona el término “solución” y no el de raíz de la ecuación.

3. Se analiza el comportamiento de la función cuadrática y de su inversa, la función que denominan “raíz cuadrada”. Frente a los programas anteriores, se observa que el estatus de los radicales aparece aquí en su sentido matemático, se le reconoce como una función, por tanto, hay un avance en este sentido.

En el Programa de formación diferenciada, aparecen en tanto los siguientes aprendizajes esperados:

Aprendizajes esperados.

Los alumnos y las alumnas:

2. Conocen el significado, sentido y notación de potencias con exponente fraccionario, incluyendo raíces n-ésimas, establecen las equivalencias de notación y utilizan aquella que sea más conveniente de acuerdo al contexto.
3. Conocen y relacionan distintos métodos para resolver ecuaciones de segundo grado y analizan las propiedades de las soluciones de una ecuación (Pág.15).

Los aprendizajes esperados 2 y 3 nos indican que el propósito de la propuesta ministerial es relacionar la equivalencia de notaciones para las raíces ya sea utilizando el **símbolo radical o la forma de potencia** con exponente fraccionario. Habrá que atender especialmente los métodos de resolución de la ecuación cuadrática, para determinar si estos pueden conducir a algún tipo de error relacionado al uso de doble signo.

Además, interesará mirar si hay alusión a lo que llaman significado y sentido, además de la **notación de las potencias de exponente fraccionario**. Por otra parte, respecto de las notaciones, la expresión: “utilizar aquella que sea más conveniente de **acuerdo al contexto**”, abre la interrogante acerca de cuál es la conveniencia a la que apuntan.

4.4.2.8. Organización de los contenidos.

En el programa de matemáticas para la formación común, los contenidos de esta asignatura se organizan según el siguiente cuadro sinóptico:

Unidades, contenidos y distribución temporal			
Cuadro sinóptico			
Unidades			
1	2	3	4
Las funciones cuadrática y raíz cuadrada	Inecuaciones lineales	Más sobre triángulos rectángulos	Otro paso en el estudio de las probabilidades
Contenidos			
a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador. b. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones: $y = ax^2$ $y = x^2 \pm a$, $a > 0$, $y = (x \pm a)^2$, $a > 0$ $y = ax^2 + bx + c$ Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x . Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas. c. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x , deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = x $. d. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.	a. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita. b. Intervalos en los números reales. c. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones. d. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.	a. Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo. b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas. d. Comentario histórico sobre los números irracionales; trios pitagóricos; comentarios sobre el Teorema de Fermat.	a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico. b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios. c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.
Tiempo estimado			
30 a 35 horas	20 a 25 horas.	25 a 30 horas	25 a 30 horas

En el manual que distribuye el Ministerio de Educación a los colegios y liceos del país, aparece el objeto matemático en estudio en la primera unidad denominada “Las funciones cuadrática y raíz cuadrada”, correspondiendo a una continuación de las funciones tratadas en NM2 (función lineal, afín, valor absoluto y parte entera) y como conocimiento previo para las que se estudian en NM4 (función potencia, exponencial y logarítmica).

El desglose de la unidad por temas presentado en página 16 es el siguiente:

Unidad 1

Las funciones cuadrática y raíz cuadrada.

Contenidos

a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.

b. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:

$$y = ax^2$$

$$y = x^2 \pm a, a > 0$$

$$y = (x \pm a)^2, a > 0$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x.

Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.

c. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = |x|$.

d. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

Hasta este curso los alumnos, supuestamente han experimentado con situaciones que conducen a una expresión cuadrática del tipo $x^2 = a$, donde a es positivo, ya que está en un contexto de medida de un determinado segmento, mediante aplicaciones de los teoremas de Pitágoras, Thales o cálculos de medias proporcionales. También en segundo año medio, con elementos básicos de geometría analítica, como la distancia

entre dos puntos del plano cartesiano, en que nuevamente está como base el teorema de Pitágoras pero en términos de coordenadas. De este modo, no han aparecido necesariamente todavía algunos problemas que promuevan al estudiante incorporar los números negativos en conjunto con la raíz cuadrada, como para advertir las restricciones que deben detectarse para el tratamiento de este objeto matemático como función, lo que como se verá a continuación, se deja para el análisis del nivel NM3.

Los alumnos que optan por el plan diferenciado en que se incluye la asignatura “Álgebra y Modelos Analíticos”, estudian la generalización de la raíz cuadrada, es decir, analizan diversas situaciones en que aparecen las raíces enésimas. Como la raíz cuadrada es un caso particular de la familia de raíces enésimas para el valor 2 del índice de la raíz, es necesario incluir en esta investigación, el cómo se presenta en el manual de este curso diferenciado.

Revisemos primero los contenidos mínimos propuestos y los aprendizajes esperados asociados a la primera unidad denominada Profundización del Lenguaje Algebraico.

Contenidos mínimos

a. Expresiones racionales. Operatoria algebraica. Factorización, simplificación, racionalización. Ecuaciones sencillas con expresiones racionales.

b. Raíces n-ésimas de números positivos. Potencias con exponente fraccionario. Operatoria. Relación entre potencias de exponente fraccionario y raíces.

c. Ecuación de segundo grado. Deducción de la fórmula para encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática. Análisis de las soluciones y su relación con el gráfico de la correspondiente función. Estudio del gráfico de la función cuadrática considerando el signo del discriminante (Pág.15).

En el punto b) de los contenidos mínimos, se presentan las raíces n-ésimas de números positivos y se vincula luego con las potencias de exponente fraccionario. También aparece en el siguiente punto, el estudio de la ecuación de segundo grado, la que está ligada como hemos señalado, a la confusión que lleva a creer que $\sqrt{4} = \pm 2$.

Interesa averiguar en este tema si hay coherencia con la propuesta para el plan común, revidado anteriormente.

El programa completo de Álgebra y modelos analíticos, de la formación diferenciada tiene la siguiente organización es esta:

Unidades, contenidos y distribución temporal		
Cuadro sinóptico		
Unidades		
1	2	3
Profundización en lenguaje algebraico	Lugares geométricos	Programación lineal
Contenidos		
<p>a. Expresiones racionales. Operatoria algebraica. Factorización, simplificación, racionalización. Ecuaciones sencillas con expresiones racionales.</p> <p>b. Raíces n-ésimas de números positivos. Potencias con exponente fraccionario. Operatoria. Relación entre potencias de exponente fraccionario y raíces.</p> <p>c. Ecuación de segundo grado. Deducción de la fórmula para encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática. Análisis de las soluciones y su relación con el gráfico de la correspondiente función. Estudio del gráfico de la función cuadrática considerando el signo del discriminante.</p>	<p>a. Distancia entre dos puntos del plano.</p> <p>b. La circunferencia como lugar geométrico. Deducción de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen. Gráfico. Ecuación de la circunferencia trasladada.</p> <p>c. Relación de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ con la semicircunferencia. Análisis de los posibles valores de x.</p> <p>d. Resolución gráfica y analítica de problemas sencillos que involucren rectas, circunferencia y parábola.</p>	<p>a. Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Descripción de un semiplano por medio de una inecuación lineal con dos incógnitas. Gráfico de semiplanos e intersección de ellos. Relación entre ecuaciones e inecuaciones lineales.</p> <p>b. Resolución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.</p> <p>c. Programación lineal en dos variables. Función objetivo. Planteo y resolución gráfica de problemas sencillos de programación lineal.</p> <p>d. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.</p>
Tiempo estimado		
40 a 45 horas.	30 a 35 horas.	30 a 40 horas.

4.4.2.9. Orientaciones explicitadas acerca de los radicales.

Dentro de las orientaciones didácticas ubicadas en página 18, hay dos párrafos que nos proporcionan antecedentes para analizar:

“Orientaciones didácticas

En la presente unidad se estudia la función cuadrática, su representación gráfica y su estrecha relación con la función raíz cuadrada. Interesa fundamentalmente que los alumnos y alumnas visualicen y comparen el tipo de crecimiento que modelan las funciones cuadráticas, raíz cuadrada y función lineal. Ello les permitirá distinguir la necesidad de utilizar un modelo u otro, frente a una determinada situación” (Pág.18).

De las orientaciones didácticas propuestas en el programa del plan diferenciado de Álgebra y Modelos Analíticos, seleccionamos los últimos dos párrafos, en que se hace mención sobre la importancia de la generalización de casos particulares como la construcción del concepto raíz enésima a partir del conocimiento de las raíces cuadradas y cúbicas estudiadas en el plan común. Esto supone el estudio de restricciones del uso de variables para situaciones generales.

“Orientaciones didácticas

En esta unidad interesa que los estudiantes profundicen sus conocimientos sobre el lenguaje algebraico, continuando el trabajo ya desarrollado en 1º y 2º Medio, en un diálogo permanente entre la aritmética y el álgebra, entre los casos particulares y la generalización; y, además, que amplíen la gama de conceptos relativos a función cuadrática, ecuación de segundo grado y raíces, tema que se estudia también en la Formación General durante este mismo año.

Además, es importante que los alumnos y alumnas logren percibir el álgebra como una herramienta que generaliza y, en consecuencia, está directamente relacionada con las demostraciones; se sugiere invitar constantemente a los estudiantes a la reflexión y a diferenciar los casos particulares del general”.

4.4.2.10. Actividades o ejemplos propuestos.

Una gran diferencia que marcan estos programas con los anteriores, es la incorporación de actividades genéricas propuestas con algunas recomendaciones adicionales, específicas acerca de qué debe observar el profesor en sus estudiantes. A continuación se citan y además se resuelven (lo que no está en el programa) para tener una mejor aproximación que favorezca la caracterización del Saber a Enseñar propuesto.

Actividades del programa de formación común.

Actividad 1.

Los alumnos deben aprender a graficar relaciones del tipo $y = kx^2$, **(1)** donde k es un número real distinto de cero, para lo cual se dan ejemplos como $y = \pi r^2$ (estudio de la variación del área de un círculo, cuando varía su radio) y $s = \frac{1}{2}gt^2$ **(2)** (relación entre la variación de la distancia recorrida por un objeto en caída libre, cuando varía el tiempo mientras cae y usando $g \approx 9,8 \frac{m}{s^2}$). En las actividades también se menciona la necesidad que los estudiantes grafiquen por medio del uso de tablas de valores, dando a la variable independiente valores positivos y negativos para que puedan obtener las dos ramas simétricas que constituyen la parábola, sin embargo, los ejemplos **(1)** y **(2)** sugeridos no tienen sentido en el conjunto de los números reales negativos. Implícitamente el estudiante al marcar los puntos obtenidos, asocian a dos números reales opuestos, digamos a y $-a$ un mismo cuadrado, es decir, tienen como imagen a a^2 .

Luego en página 22 aparece el estudio de la expresión $y = \sqrt{x}$ como se cita a continuación:

Actividad 2.

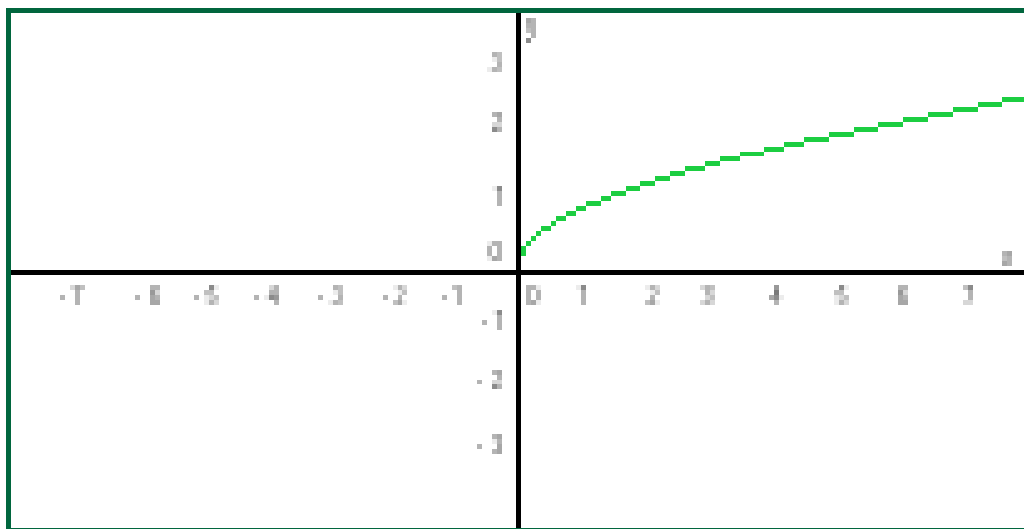
Estudian la expresión $y = \sqrt{x}$, como modelo de algunos fenómenos o situaciones; organizan una tabla de valores y trazan el gráfico correspondiente utilizando, preferentemente, un programa computacional de manipulación algebraica y gráfica (p.22).

Ejemplo A.

Graficar y analizar la expresión $y = \sqrt{x}$, en que la variable x corresponde al área de un cuadrado en tanto que y corresponde a la medida del lado de ese cuadrado.

Indicaciones al docente.

Los estudiantes analizan en el gráfico las variaciones entre los valores de las variables; si x toma valores en el intervalo $[1,2]$, ¿cuál es el intervalo para y ? Y si x varía en el intervalo $[4,5]$, ¿cuáles son los valores para y ?



Comparan con las variaciones observadas en la actividad anterior.

Este es un buen momento para profundizar en relación con las raíces cuadradas de números enteros, de fracciones, de decimales y, en general, de cualquier número real. El uso de una calculadora científica permite aproximarse a valores decimales de las raíces cuadradas irracionales, incluyendo, si se considera pertinente, números como $\sqrt{\sqrt{2}}$, por ejemplo” (p.22).

Los ejemplos siguen estando referidos al ámbito de los **números reales no negativos**. Se estudia $y = \sqrt{x}$ en que x corresponde al área de un cuadrado siendo y la medida del lado respectivo. Otras relaciones que se sugieren son:

a) $t = 0,45\sqrt{d}$, en que d es la distancia y t es el tiempo que demora un objeto en caída libre.

b) $T = 2\sqrt{I}$, donde I es la longitud de un péndulo y T su período.

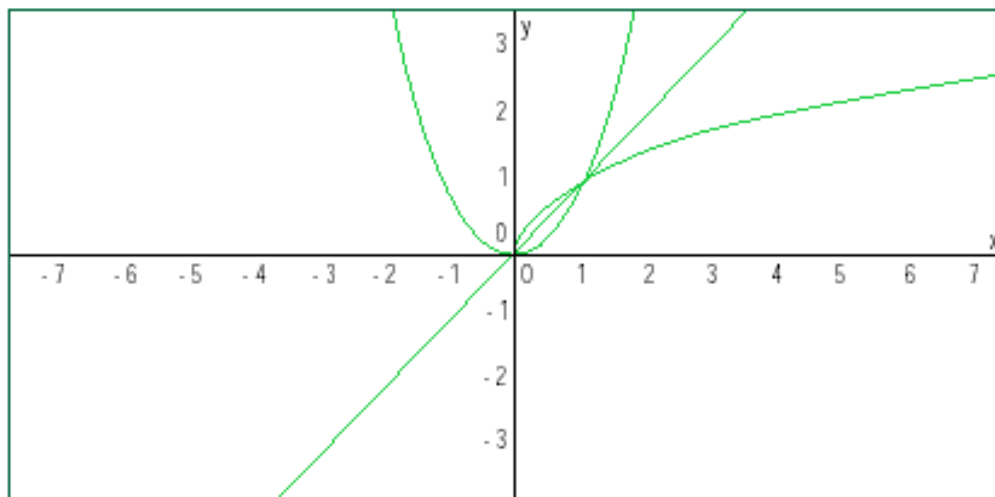
El ejemplo C de la actividad 3, que encontramos en página 26 dice:

Ejemplo C

Constatan la simetría de la gráfica de la función cuadrática con la de la raíz cuadrada, respecto a la recta $y = x$. Discuten acerca de la necesidad que $x > 0$.

Indicaciones al docente.

En un mismo sistema grafican $y = x$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.



Observar, por ejemplo, que una paralela al eje y por el punto $x=2$ interseca a la primera gráfica en $y=\sqrt{2}$, a la segunda en $y=2$ y a la tercera en $y=4$. Por otra parte, si se traza una paralela al eje x por el punto $y=2$ se interseca a la parábola en el punto $x=\sqrt{2}$, a la recta en el punto $x=2$ y a la otra gráfica en el punto $x=4$ (p.24).

Aunque no se explicita, la gráfica muestra que para $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$ y además para $x = 0$ se tiene $y = 0$. Si se apoya la clase con un graficador (calculadora o computador) la gráfica aparece automáticamente. Este parece ser el momento preciso

para indicar que la raíz cuadrada de un número real positivo, es también un real positivo y además que $\sqrt{0} = 0$.

El manual pone énfasis en que los alumnos no ven como números las expresiones con raíces, y que por ello es necesario dar ejemplos que terminen con esta creencia. Sin embargo, advierte a su vez, que se pierde la presentación de expresiones del tipo $-\sqrt{a}$ con $a > 0$.

Podemos ver así, que se comienza por presentar las expresiones con radicales (en especial con raíces cuadradas) que representan números positivos. Sus opuestos no son mencionados por el momento.

Se invita al alumno a construir segmentos cuyas longitudes corresponden a raíces cuadradas de algunos números para llegar a establecer algunas igualdades como $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y comparar números tales como:

$$\sqrt{2} ; \sqrt{8} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Se muestra ahora, al pie de la página 31, el ejemplo G, en que se tiene un muy buen antecedente:

Ejemplo G.

Analizar la ecuación $\sqrt{x} = -5$; conocer y utilizar los convenios de notación.

Indicaciones al docente.

Es importante que los estudiantes utilicen correctamente la convención $\sqrt{a^2} = |a|$. De esta manera comprenderán por qué la ecuación planteada no tiene solución.

A veces, erróneamente, se escribe $\sqrt{4} = \pm 2$, siendo lo correcto $\sqrt{4} = 2$ y, por lo tanto, $-\sqrt{4} = -2$. Es conveniente precisar que para $a > 0$, las soluciones de la ecuación $x^2 = a$ son los números reales \sqrt{a} y $-\sqrt{a}$ y que no hay solución real para valores negativos de a .

Puede ser un momento oportuno para hacer una breve presentación de los números complejos, planteando la construcción de i como una invención de los matemáticos para poder resolver la ecuación $i^2 = -1$ (p.32).

En este ejemplo, se hace hincapié en que la raíz cuadrada de un número real, si existe, es no negativa. Como lo veremos más adelante, se tiende a enseñar las llamadas ecuaciones irracionales (que en realidad debieran denominarse ecuaciones con radicales) con el método de la elevación al cuadrado, generalmente sin analizar los campos de validez, lo que convierte a la ecuación original en otra no equivalente pero cuyo conjunto solución incluye las soluciones de la ecuación inicial.

Además, se puede ver que explicita el error $\sqrt{4} = \pm 2$, que es el detonante de esta investigación.

Síntesis:

En el programa de Educación Matemática para NM3, el objeto matemático “raíz cuadrada” aparece en la primera unidad llamada: “Las funciones cuadrática y Raíz cuadrada”. Así, la noción de raíz cuadrada se incorpora en los aprendizajes de los alumnos en su actual estatus en el edificio matemático; esto es, como función. Se pone énfasis en que los estudiantes construyan los gráficos de funciones simples en que aparece la raíz cuadrada y hagan comparaciones con la función cuadrática.

Uno de los aspectos más importantes para esta investigación reside en el hecho que se explicita que en la expresión \sqrt{x} , debe ocurrir que $x \geq 0$, y más adelante se indica que la necesidad de analizar ecuaciones como $\sqrt{x} = -5$ en que se interpreta que por las gráficas estudiadas, no es posible que una raíz cuadrada sea un número real negativo. Con esto, es de suponer, debieran superarse confusiones en algunos profesores que aún afirman que la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos soluciones, como $\sqrt{4} = \pm 2$, ejemplo que muestra el manual a propósito de concepciones erróneas enseñadas en el aula.

Actividades del programa de formación diferenciada

Actividad 3.

Amplían los conceptos de raíces cuadrada y cúbica a raíz n-ésima; conocen y aplican sus propiedades.

Ejemplo A.

Resolver las siguientes ecuaciones para x ; establecer las restricciones para que x tome un valor real.

$$\text{i) } x^2 = a$$

$$\text{ii) } x^3 = a$$

$$\text{iii) } x^4 = a$$

$$\text{iv) } x^n = a$$

Indicaciones al docente

Se sugiere igualar a cero las ecuaciones, factorizar y analizar cada uno de los casos que se obtienen.

En la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 &= a \\ (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) &= 0 \\ x_1 &= \sqrt{a} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

Necesariamente, en este caso, $a > 0$, por las restricciones de la raíz cuadrada.

Al resolver la tercera ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^4 - a &= 0 \\ (x^2 + \sqrt{a})(x + \sqrt{\sqrt{a}})(x - \sqrt{\sqrt{a}}) &= 0 \\ x_1 &= \sqrt[4]{a} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

Es necesario plantear la igualdad a cero del tercer factor $x^2 + \sqrt{a} = 0$ de donde $x^2 = -\sqrt{a}$, lo que no es coherente con la operatoria definida en los números reales, en que los cuadrados siempre son positivos.

Además es interesante que los alumnos y alumnas observen que en los casos i) y iii) el exponente de x es par, lo que obliga a que a sea mayor o igual que cero. Esto permite generalizar rápidamente el caso de índice par.

Importa que para los alumnos y alumnas tenga sentido la igualdad $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ con $a \geq 0$ si n es par.

Conviene tomar ejemplos numéricos antes de plantear la generalización y las restricciones correspondientes. Puede ser un momento propicio para mostrar a los alumnos y alumnas cómo los matemáticos, ante la necesidad de resolver problemas, amplían consistentemente la teoría considerada, en este caso los sistemas numéricos, extendiendo los números reales a los complejos (Pág.24).

La resolución de estas ecuaciones incompletas de la forma $x^2 = a$ uno de los puntos más conflictivos ya que se ocupa de mencionar que si $x^2 = 4$, se llega a $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ y afirman que $\sqrt{4} = \pm 2$ es un error. En las indicaciones al docente, sugiere resolver por factorización estas ecuaciones, evitando el error. Nuevamente, indica la restricción del radicando de la raíz cuadrada como un valor que debe ser positivo.

Ejemplo B.

Escribir en forma más simple las siguientes expresiones:

$$\text{I) } \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{5}} =$$

$$\text{II) } (3\sqrt{2} - 4\sqrt{8})^2 =$$

$$\text{III) } \sqrt{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}} =$$

Indicaciones al docente

Conviene que los alumnos y alumnas identifiquen que la operatoria que se realiza en la transformación de expresiones de este tipo se respalda en la igualdad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Si se considera oportuno se puede demostrar este teorema y sistematizar los ejercicios del tipo multiplicación de raíces del mismo índice, raíz de un producto e introducción del coeficiente dentro de la raíz (p.25).

En este ejemplo, se aprecia la ausencia de un comentario al docente que muestre que la igualdad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ es verdadera sólo para $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Ejemplo D.

Expresar las sumas siguientes en una forma más sencilla:

$$\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{300} =$$

$$\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{80} =$$

Indicaciones al docente.

Estas sumas las pueden realizar descomponiendo los radicandos en factores de modo que uno sea un cuadrado perfecto, o bien, utilizando una calculadora u otro método alternativo.

Es interesante comparar ambos procedimientos, la exactitud de la notación con raíces y las aproximaciones en la calculadora (p.26).

En el ejemplo D, se pide hacer uso de la descomposición de raíces, propiedad que se enuncia para raíces cuadradas como $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, cuando $a \geq 0$, $b \geq 0$. Falta esta indicación conectándola con el hecho que el radicando debe ser siempre no negativo, como condición de existencia de la raíz cuadrada en el cuerpo de los números reales.

Ejemplo E.

Expresar en forma más sencilla las expresiones siguientes:

$$\text{i) } \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} =$$

$$\text{ii) } \left(\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x + y}} + \frac{\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}}{\sqrt{x - y}} \right) \div \sqrt{x - y}$$

$$\text{iii) } \frac{\sqrt{a + \frac{2ab}{b^2 + 1}} + \sqrt{a - \frac{2ab}{b^2 + 1}}}{\sqrt{a + \frac{2ab}{b^2 + 1}} - \sqrt{a - \frac{2ab}{b^2 + 1}}} =$$

Indicaciones al docente.

Es necesario analizar las restricciones implícitas en cada una de estas expresiones.

Si se considera oportuno se puede demostrar que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ y sistematizar ejercicios asociados a la división de raíces (p.26).

En los ejercicios citados en este ejemplo E, se requiere conocer las propiedades anteriores e incorporar $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Nótese que en las indicaciones al docente, recalca la necesidad de analizar las restricciones respectivas.

Ejemplo H.

Racionalizar el denominador en los ejercicios siguientes:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \frac{11}{5 - \sqrt{3}} \\ \text{ii)} & \frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Indicaciones al docente.

El proceso de racionalización de denominadores facilita la comparación de fracciones; será interesante comparar los resultados que se obtienen desde el cálculo algebraico de las raíces y desde el uso de la calculadora y analizar el sentido de la exactitud de acuerdo a las situaciones de uso (p.27).

En el tema de la racionalización, falta que se analicen las cantidades subradicales (con mayor razón en el caso numérico) pues no se puede trabajar con expresiones que se desconocen como por ejemplo, $\sqrt{1 - 3\sqrt{5}}$.

Para los alumnos, no es claro a simple vista que $3 - 2\sqrt{2}$ que aparece en el ejemplo ii) sea un número positivo y por tanto pueda operar con $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

Actividad 4

Interpretan potencias con exponente fraccionario y aplican la equivalencia entre notación con potencias y con raíces.

Ejemplo A

Utilizar una calculadora y determinar los valores de:

$$2^{\frac{1}{2}} ; 2^{\frac{3}{2}} ; 3^{\frac{1}{2}} ; 4^{\frac{1}{2}} ; 25^{\frac{1}{2}} ; 8^{\frac{1}{3}}$$

Analizar el siguiente desarrollo y proponer una conclusión:

$$x = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$x^2 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5$$

$$x_1 = \sqrt{5} \ ; \ x_2 = -\sqrt{5} \text{ (p.28).}$$

Indicaciones al docente.

Invitar a los alumnos y alumnas a conjeturar sobre el valor de esas potencias antes de hacer el cálculo con la calculadora. Es importante que los alumnos y alumnas le encuentren sentido a la igualdad $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ explicitando las restricciones para los valores de a si n es par. Será interesante analizar con los estudiantes un caso del tipo siguiente:

$x = (-2)^{\frac{1}{2}}$ elevando al cuadrado se obtiene $x^2 = \left((-2)^{\frac{1}{2}}\right)^2$ esto es equivalente a $x^2 = -2$, lo que no es coherente con lo planteado en los números reales; de ahí la exigencia de la restricción:

$$\sqrt[2n]{a} = a^{\frac{1}{2n}} \ , \ a \geq 0$$

$$\sqrt[2n+1]{a} = a^{\frac{1}{2n+1}} .$$

en que n es un número natural mayor o igual que 1 (p.29).

El desarrollo de $x = 5^{\frac{1}{2}}$ mostrado en el ejemplo A es utilizado en algunos textos como demostración de la relación entre las raíces y las potencias de exponente fraccionario. Sin embargo, se deja entrever una situación anómala: se llega a que $5^{\frac{1}{2}}$ que es el valor inicial de x , toma dos valores: $x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = -\sqrt{5}$. Si los alumnos ya han utilizado calculadora quizá podrán desechar el valor negativo, pero esto no está especificado correctamente en el ejemplo citado.

Ejemplo D.

Resuelven ecuaciones como las siguientes:

$$\sqrt{x} = x - 2$$

$$\sqrt{x + \sqrt{1 + 2x}} = 1$$

$$\sqrt{4 - x} + \sqrt{x + 9} = 5$$

Indicaciones al docente

Es importante establecer, para la resolución de este tipo de ecuaciones, mecanismos para discriminar si las soluciones obtenidas son o no correctas. Como el proceso de resolución involucra una elevación de la ecuación al cuadrado, se pierden las diferencias de signo y pueden introducirse soluciones al problema original.

Uno de estos mecanismos es comprobar en la ecuación inicial, cada solución que se obtenga. Otro es determinar los rangos de validez de las soluciones (p.31).

Aquí podemos ver que las ecuaciones con radicales que se muestran se resuelven elevando una vez al cuadrado (como en la primera) o dos veces al cuadrado (ecuaciones segunda y tercera).

Una de las situaciones frecuentes que no está claro en el proceso de enseñanza y que aquí se menciona superficialmente, es porqué se obtiene soluciones que no satisfacen la ecuación original. Falta una orientación en este aspecto para que se comprenda que el método de elevación al cuadrado no es un paso reversible unívoco, como todos los estudiados en la resolución de ecuaciones de primer grado. Además, no hay un desarrollo que permita vislumbrar cómo obtener los campos de validez para las soluciones, mostrando intervalos o intersecciones de éstos, según el dominio y el recorrido de las funciones raíces cuadradas involucradas.

Resolviendo cada una de las ecuaciones planteadas, tenemos:

a) $\sqrt{x} = x - 2$

Haciendo un estudio de los campos de validez de las posibles soluciones, encontramos las restricciones $x \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$ o bien $x \geq 2$, las que se cumplen

simultáneamente para $x \geq 2$. Por lo tanto, las soluciones, si existen deben ser mayores o iguales a 2.

Suponiendo que entonces $x \geq 2$, elevando cada miembro al cuadrado:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})^2 &= (x-2)^2 \\ \Rightarrow x &= x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow x-4 &= 0 \vee x-1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4 \vee x_2 = 1\end{aligned}$$

La única solución que satisface con la premisa inicial $x \geq 2$, es $x = 4$. En efecto, al reemplazar:

Para $x_1 = 4$ se tiene $\sqrt{4} = 4 - 2$, es decir, $\sqrt{4} = 2$ lo que es verdadero.

Para $x_2 = 1$ se tiene $\sqrt{1} = 1 - 2$, es decir, $\sqrt{1} = -1$ ¡falso!.

$$\text{b) } \sqrt{x + \sqrt{1 + 2x}} = 1$$

Las restricciones para x son:

$$\text{i) } 1 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{2}$$

Elevando al cuadrado cada miembro:

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{1 + 2x}}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow x + \sqrt{1 + 2x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2x} = 1 - x \quad \text{¡Aquí hay otra restricción!}$$

$$\text{ii) } 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Elevando nuevamente al cuadrado cada miembro

$$\begin{aligned}(\sqrt{1 + 2x})^2 &= (1 - x)^2 \Rightarrow 1 + 2x = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 4\end{aligned}$$

Como sólo $x = 4$ satisface las condiciones i) y ii), la ecuación tiene por única solución $x = 1$.

Reemplazamos para comprobar:

Para $x_1 = 0$ se tiene $\sqrt{0 + \sqrt{1 + 2 \cdot 0}} = 1$, es decir, $\sqrt{\sqrt{1}} = 1$ ¡verdadero!.

Para $x_2 = 4$ se tiene $\sqrt{4 + \sqrt{1 + 2 \cdot 4}} = 1$, es decir, $\sqrt{7} = 1$ ¡falso!

$$c) \sqrt{4-x} + \sqrt{x+9} = 5$$

Las restricciones para x son:

$$i) 4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$$

$$ii) x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -9$$

Así, de i) y ii) las soluciones deben estar en el intervalo real $[-9, 4]$.

Elevando al cuadrado cada miembro:

$$\begin{aligned} (\sqrt{4-x} + \sqrt{x+9})^2 = 5^2 &\Rightarrow 4-x + 2\sqrt{(4-x)(x+9)} + x+9 = 25 \Leftrightarrow \\ 2\sqrt{36-5x-x^2} = 12 &\Leftrightarrow \sqrt{36-5x-x^2} = 6 \end{aligned}$$

Elevando otra vez al cuadrado

$$\begin{aligned} (\sqrt{36-5x-x^2})^2 = 6^2 &\text{ y suponiendo que } 36-5x-x^2 \geq 0, \text{ tenemos:} \\ 36-5x-x^2 = 36 &\Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 5 = 0 \end{aligned}$$

Luego, $x_1 = 0$; $x_2 = -5$. ¡Ambos candidatos cumplen las restricciones!, por tanto deben ser las dos soluciones de la ecuación planteada.

Reemplazando:

Para $x_1 = 0$ se tiene $\sqrt{4-0} + \sqrt{0+9} = 5$ es decir, $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$ verdadero.

Para $x_2 = -5$ se tiene $\sqrt{4-(-5)} + \sqrt{-5+9} = 5$, es decir, $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$, verdadero.

4.5. Síntesis del Capítulo.

En este capítulo se ha abordado los programas de estudio que comportan el texto del saber a enseñar en su sentido oficial como una elección realizada a nivel país por los expertos del Ministerio de Educación en el área curricular y que por tanto fijan cuáles deben ser los contenidos de los saberes matemáticos que se convierten en saber escolar.

Con el propósito de establecer un perfil de cada programa, muestro a continuación la matriz Mr de resumen y cotejo. Luego de este instrumento, estableceré los resultados más significativos tanto por cada período para determinar el perfil de cada uno, así como el encuentro conjunto de los perfiles para la elaboración de una caracterización (si es posible) del Saber a Enseñar oficial entre 1969 y 2009 en Chile.

Tabla 16 Matriz de Resumen y cotejo para los programas ministeriales

Campos, aspectos y sub - aspectos		Períodos (1,2,3)		
		Prog 1	Prog 2	Prog 3
1. Vigencia de la fuente		69 - 81	82 - 00	01 - 09
2. Nivel de enseñanza media		2°	3°	3°
3. Uso del signo radical	3.1 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama raíces	X*	X*	X*
	3.2 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama radicales			
	3.3 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama irracionales		X	
	3.4 Comete el error del doble signo (por ejemplo, $\sqrt{4} = \pm 2$)			
	3.5 Lo usa con restricciones sólo para el radicando (dominio)		X	
	3.6 Lo usa con restricciones de dominio y recorrido	X		X
4. Introducción al concepto	4.1 Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)	X	X	
	4.2 Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)			X
	4.3 Como inversa de la potenciación	X	X	X
	4.4 Como potencia de exponente fraccionario (o racional)			
	4.5 Otro (especificar al final de la parrilla)			
5. Tipos de representaciones que utiliza	5.1 Con el signo radical	X	X	X
	5.2 Con uso de valor absoluto			X
	5.3 Con notación de potencia (exp. fraccionario)	X	X	X
	5.4 Notación funcional			X
	5.5 Otro (especificar a continuación de la parrilla)			

6. Propiedades de los radicales	6.1 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	6.1.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		6.1.2 La muestra correctamente	NI	NI	NI
		6.1.3 No muestra	NI	NI	NI
		6.1.4 Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		6.1.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		6.1.6 No restringe	NI	NI	NI
		6.1.7 Define unilateralmente	NI	NI	NI
		6.1.8 Define bilateralmente	NI	NI	NI
	6.2 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	6.2.1 La muestra con errores lógicos			
		6.2.2 La muestra correctamente			
		6.2.3 No muestra	X	X	X
		6.2.4 Usa restricciones completas	X		
		6.2.5 Usa restricciones incompletas			
		6.2.6 No restringe		X	X
		6.2.7 Define unilateralmente	NI	X	X
		6.2.8 Define bilateralmente	NI		
	6.3 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	6.3.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		6.3.2 La muestra correctamente	NI	NI	NI
		6.3.3 No muestra	NI	NI	NI
		6.3.4 Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		6.3.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		6.3.6 No restringe	NI	NI	NI
		6.3.7 Define unilateralmente	NI	NI	NI
		6.3.8 Define bilateralmente	NI	NI	NI
	6.4 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a : b}$	6.4.1 La muestra con errores lógicos			
		6.4.2 La muestra correctamente			
		6.4.3 No muestra	X	X	X
		6.4.4 Usa restricciones completas	X		X
		6.4.5 Usa restricciones incompletas			
		6.4.6 No restringe		X	
		6.4.7 Define unilateralmente	NI	X	X
		6.4.8 Define bilateralmente	NI		
	6.5 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$	6.5.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI	NI
6.5.2 La muestra correctamente		NI	NI	NI	
6.5.3 No muestra		NI	NI	NI	
6.5.4 Usa restricciones completas		NI	NI	NI	
6.5.5 Usa restricciones incompletas		NI	NI	NI	
6.5.6 No restringe		NI	NI	NI	
6.5.7 Define unilateralmente		NI	NI	NI	
6.5.8 Define bilateralmente		NI	NI	NI	
6.6 $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	6.6.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI	NI	
	6.6.2 La muestra correctamente	NI	NI	NI	

		6.6.3 No demuestra	NI	NI	NI
		6.6.4 Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		6.6.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		6.6.6 No restringe	NI	NI	NI
		6.6.7 Define unilateralmente	NI	NI	NI
		6.6.8 Define bilateralmente	NI	NI	NI
	$6.7 \sqrt[n]{a^n} = a$	6.7.1 La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		6.7.2 La demuestra correctamente	NI	NI	NI
		6.7.3 No demuestra	NI	NI	NI
		6.7.4 Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		6.7.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		6.7.6 No restringe	NI	NI	NI
		6.7.7 Define unilateralmente	NI	NI	NI
		6.7.8 Define bilateralmente	NI	NI	NI
	$6.8 (\sqrt[n]{a})^n = a$	6.8.1 La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		6.8.2 La demuestra correctamente	NI	NI	NI
		6.8.3 No demuestra	NI	NI	NI
		6.8.4 Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		6.8.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		6.8.6 No restringe	NI	NI	NI
		6.8.7 Define unilateralmente	NI	NI	NI
		6.8.8 Define bilateralmente	NI	NI	NI
	$6.9 a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	6.9.1 La demuestra con errores lógicos	NI	NI	
		6.9.2 La demuestra correctamente	NI	NI	
		6.9.3 No demuestra	NI	NI	X
		6.9.4 Usa restricciones completas	NI	NI	
		6.9.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	
		6.9.6 No restringe	NI	NI	X
6.9.7 Define unilateralmente		NI	NI	X	
6.9.8 Define bilateralmente		NI	NI		
7. Aplicaciones de los radicales	7.1 Racionalización	7.1.1 Sólo de denominadores	X	X	X
		7.1.2 De numeradores y denominadores			
		7.1.3 Restringe			
	7.2 Ecuaciones cuadráticas	7.2.1 Conduce al error $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a} = \pm b$			
		7.2.2 Establece correctamente que $x^2 = a$, entonces, $x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$	X	X	X
		7.2.3 Restringe			
	7.3 Ecuaciones con radicales	7.3.1 Explica sobre transformaciones algebraicas no equivalentes	NI		X
		7.3.2 Comprueba las soluciones y selecciona sólo las que corresponden	NI		X
		7.3.3 Comprueba las soluciones y las separa en soluciones y soluciones ajenas	NI		

		7.3.4 Estudia las restricciones antes de resolver	NI		X
7.4 Números Complejos		7.4.1 Trasciende el error del doble signo			
		7.4.2 Admite la notación con el radical sólo para la raíz real no negativa	X	NI	NI
	7.5 Teorema de Pitágoras		NI	X	X
	7.6 Irrracionalidad		X	X	X

* La salvedad es que las llama raíces pero bien definido como raíz aritmética o raíz enésima positiva.

4.5.1. Resultados por período

(Determinación de perfiles del Saber a Enseñar Oficial)

Respecto de los resultados de la matriz anterior, es posible identificar un perfil¹³ por cada período del Saber a Enseñar promulgado por el Ministerio de Educación. Para tal efecto, he organizado la información del perfil en una tabla de doble entrada, cuya primera columna contiene las variables observadas 3 a 7 de la Matriz de resumen y cotejo (Mr), la segunda da una descripción del comportamiento modal de la variable y la tercera corresponde al porcentaje de fuentes consultadas que satisfacen tal descripción.

Perfil del Saber a Enseñar Oficial del primer período		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíz aritmética y restringe completamente.	100
4. Introducción al concepto	Planteamiento Deductivo. Introduce como una de las raíces x en la situación $x^n = y$ trabajando en R y extendiendo a C. (Inversa de la potenciación, implícito).	100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical y la notación en potencia.	100
6. Propiedades de los radicales	Multiplicación y división de radicales de igual índice, las cuales no demuestra pero sí restringe correcta y completamente.	100
7. Aplicaciones de los radicales	<ul style="list-style-type: none"> • Racionalización sólo de denominadores, sin restricciones. • Resolución correcta de ecuaciones cuadráticas, sin restringir. • Números complejos, sin errores conceptuales. • Irrracionalidad. 	100

¹³ En el sentido declarado por el Diccionario de la Real Academia Española: “Conjunto de rasgos peculiares que caracterizan a alguien o algo”.

Observación: Los porcentajes son de 100% ya que cada período se representa por un único programa. Para el caso del período 3, donde se examinaron los programas de formación general y diferenciada de 3^a año medio, éstos deben entenderse como uno sólo en el sentido que el de formación diferenciada es una profundización.

Perfil del Saber a Enseñar Oficial del segundo período

Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces sin restricción. También irracional cuando en los contenidos presenta las ecuaciones irracionales. Sólo restringe el radicando.	100
4. Introducción al concepto	Planteamiento Deductivo. Introduce implícitamente como inversa de la potenciación.	100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical y la notación en potencia.	100
6. Propiedades de los radicales	Multiplicación y división de radicales de igual índice, las cuales no demuestra y tampoco restringe. Las enuncia de modo unilateral.	100
7. Aplicaciones de los radicales	<ul style="list-style-type: none"> • Racionalización sólo de denominadores, sin restricciones. • Resolución correcta de ecuaciones cuadráticas, sin restringir. • Ecuaciones con radicales pero no hay indicaciones. • Teorema de Pitágoras. • Irracionalidad. 	100

Perfil del Saber a Enseñar tercer período

Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces y restringe completamente.	100
4. Introducción al concepto	Planteamiento Inductivo. Introduce implícitamente como inversa de la potenciación.	100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical, la notación de potencia y como función.	100
6. Propiedades de los radicales	Multiplicación y división de radicales de igual índice, además de la introducción del coeficiente bajo el radical, las cuales no demuestra pero sí restringe completamente y las enuncia unilateralmente.	100
7. Aplicaciones de los radicales	<ul style="list-style-type: none"> • Racionalización sólo de denominadores, sin restricciones. • Resolución correcta de ecuaciones cuadráticas, sin restringir. • Ecuaciones con radicales, en las que expresa el proceso de resolución en términos de transformaciones no equivalentes. Comprueba las soluciones y determina raíces falsas, además de estudiar las restricciones antes de resolver. • Teorema de Pitágoras. • Irracionalidad. 	100

Con estos tres perfiles establecemos de forma modal la caracterización del Saber a Enseñar Oficial de los tres períodos.

4.5.2. Resultados de conjunto.

(Determinación de la caracterización del Saber a Enseñar Oficial)

Conclusiones derivadas de la matriz de resumen y cotejo aplicada a los programas.

En los tres períodos el lugar de los radicales en los programas se ha ubicado en el segundo año medio, para el caso del primer programa y se ha mantenido en 3° medio para los siguientes dos. Se entiende entonces que hay una edad legal en que los radicales deben ser estudiados, lo que acontece entre los 15 y 16 años.

El primer programa se vincula a un tratamiento muy estructuralista, heredado de la reforma de las matemáticas modernas, tal como lo demuestran las referencias bibliográficas que presenta. El segundo abandona las temáticas relacionadas con las estructuras algebraicas y el formalismo, para dar paso a organizaciones de los contenidos en una visión más instrumental sin abordar la resolución de problemas, la que recién se incorpora en parte con el enfoque constructivista de la reforma actual que incorpora la modelación matemática de ciertos fenómenos de la vida cotidiana.

Entre los programas se aprecian algunas diferencias notables: El primero ofrece algunos pocos ejemplos que orientan la labor del profesor, luego el segundo incorpora un criterio de flexibilidad que hace que los programas sean diminutos, quedando nada más que alguna pocas páginas que con el listado de objetivos y contenidos gruesos que enseñar. En efecto, se deja amplia libertad al profesor y también gran responsabilidad a los libros de texto que tendrán la misión de desarrollar las directrices ministeriales. Tal situación se revierte con la aparición de los programas del tercer período, los que incluyen una serie de actividades genéricas propuestas con indicaciones al docente sobre qué es lo que debe incluso evaluar.

Entrando en el contenido de los radicales, se observa:

1. El uso del signo radical lo emplean los programas 1 y 3 para indicar raíz aritmética y raíz enésima positiva respectivamente estableciendo las restricciones completas. El programa 2 en tanto, no hace distinción entre raíz y raíz aritmética o positiva y sólo restringe el radicando.
2. En cuanto a la elección del uso de radicandos negativos, el primer y tercer programa opta por esta alternativa y por examinar las propiedades de los radicales para este caso, pero no da señales de cómo hacer esto. El programa 2 se refiere al estudio de las raíces en general sin ahondar en la paridad de los índices. Sin embargo, cada uno presenta las potencias de exponente racional, restringiendo correctamente la base, pero no se dan ejemplos en ninguno que permitan examinar con mayor detalle si se entra en conflicto al considerar que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, que es válido para $x > 0$, y en caso que se tenga $x < 0$, establecer que $-\sqrt[n]{-x} = -(-x)^{\frac{1}{n}}$.
3. En los dos primeros programas la introducción al concepto de raíz es deductiva, lo que cambia en el tercer programa, en que se comienza estudiando la raíz cuadrada, la cúbica y finalmente la enésima.
4. El concepto de irracional asociado al signo $\sqrt{\quad}$ es empleado sólo por el programa 2 al hablar de ecuaciones irracionales. El programa 3 incorpora el estudio de las ecuaciones con radicales, pero sin apellidarlas de irracionales.
5. En cuanto a las representaciones además del signo radical, todos usan la notación de potencia y sólo el último programa avanza en explicitar el empleo del valor absoluto y de la función raíz, acercándose más al edificio matemático con una satisfactoria transposición.

6. De las propiedades de los radicales, los programas no instalan modos de demostración. Al respecto el programa 1 considera como contenido, probar los teoremas de las raíces aritméticas, el 2 no se refiere al tema, y el 3 sugiere la demostración sólo si se considera oportuno.
7. En los primeros dos programas sólo se entrega información sobre las propiedades de Multiplicación y División de radicales, en que se distingue el programa 1 del 2 por explicitar los campos de validez lo que no ocurre en el 2. En el tercer programa estas mismas propiedades están presentes sin restricciones y además presenta la propiedad $a^n\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ como aplicación de la multiplicación de radicales y nuevamente omitiendo información referida a las restricciones y la utiliza unilateralmente al llamarle “introducción del coeficiente dentro de la raíz”.
8. Todos los programas incorporan la racionalización sólo de denominadores dentro de las aplicaciones de las propiedades de los radicales, al igual que en la resolución de ecuaciones de segundo grado, en que emplean técnicas correctas que no caen en el error del doble signo.
9. De las ecuaciones con radicales, no aparece su estudio en el programa 1, sólo son nombradas en la lista de contenidos del programa 2, mientras que en el programa 3 tienen su lugar en el que se discuten las soluciones obtenidas y se da la justificación de la obtención de candidatos a raíz.
10. Los números complejos forman parte sólo del primer programa y no se evidencian errores conceptuales en el uso del radical, que lo aplican para denotar el módulo de un complejo y no se alcanza a tratar las raíces de un número complejo.
11. El Teorema de Pitágoras sólo es utilizado en los últimos dos programas en otra unidad destinada a geometría.
12. En cuanto al problema de la irracionalidad, en el primer programa se toma el sentido formal mediante la definición de números como $\sqrt{2}$ por medio del

axioma del supremo, en el programa 2 se omite esta temática y en el programa 3 no se problematiza sino se trabaja directamente con números irracionales escritos con radicales (irracionales algebraicos).

De lo anterior, se puede caracterizar el Saber a Enseñar Oficial considerando los aspectos invariantes por un lado e informando los que corresponden a cambios más trascendentales.

Caracterización del Saber a Enseñar Oficial (1969 – 2009)

Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces. Restringe completamente.	100 66,6
4. Introducción al concepto	Planteamiento Deductivo. Introduce implícitamente como inversa de la potenciación.	66,6 100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical. La notación de potencia	100 100
6. Propiedades de los radicales	Multiplicación y división de radicales de igual índice. No demuestra Restringe completamente Enuncia unilateralmente.	100 100 66,6 66,6
7. Aplicaciones de los radicales	<ul style="list-style-type: none"> • Racionalización sólo de denominadores, sin restricciones. • Resolución correcta de ecuaciones cuadráticas, sin restringir. • Ecuaciones con radicales sin mayor información. • Ecuaciones con radicales con tratamiento correcto. • Teorema de Pitágoras. • Irracionalidad. 	100 100 <u>33,3</u> <u>33,3</u> 66,6 100



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

**LAS RAÍCES Y RADICALES
EN LIBROS DE TEXTO EN CHILE
(1969 – 2009)**

Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte
a la Didáctica de las Matemáticas

Autor

ROBERTO ALFREDO VIDAL CORTÉS.

Tesis doctoral presentada a la Facultad de Ciencias de la Educación
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación

Director: Dr. MARIO QUINTANILLA GATICA.

TOMO II

Noviembre, 2009

Santiago - Chile



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Los siguientes académicos constituyeron la Comisión Evaluadora de esta Tesis:

Dra. LEONORA DÍAZ MORENO

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

Dr. ALBERTO LABARRERE SARDUY

Universidad Santo Tomas, Chile

Dr. ALEXANDER MAZ MACHADO

Universidad de Córdoba, España

TOMO II

Noviembre, 2009

Santiago - Chile

CAPITULO 5

Análisis de los libros de texto del Período 1969 – 1981.

5.1. Introducción.

En este capítulo se desarrolla la revisión de los seis libros de texto pertenecientes a la muestra intencionada del tercer período que se inicia en el año 1969¹, poniéndose en marcha los programas oficiales para segundo año de enseñanza media según el Decreto N°27.952, y cuyo término se ha contemplado en 1981, pues aparece luego el nuevo decreto N°300 que modifica los planes y programas.

Como ya se mencionó en el apartado 3.3.4., dos de los seis libros de texto revisados, corresponden a escritos mucho más antiguos y utilizados desde otras épocas y su inclusión aquí, se justifica en razón de la trascendencia que han tenido en el tiempo, el que aún hoy en día se vendan en el mercado y estén presentes en bibliotecas públicas y de establecimientos educacionales en general. Por otra parte, cabe recordar que se utilizaba lo poco (en relación a la actualidad) que había de material escrito y la imposibilidad de contar con la facilidad que nos dan los procesadores de texto hoy para elaborar este tipo de recursos.

Se aplicaron las matrices MIGt y MACt a cada uno de los seis textos que de este período, para orientar la revisión y análisis (histórico – crítico y de contenido), la que se sintetiza en la matriz de resumen Mr en el balance de cierre de este capítulo.

¹ En rigor hemos señalado que el tercer período con los programas nuevos parten en 1969. Incluimos el año 1968 además puesto que uno de los libros de texto (el n°3 del listado) aparece en ese año de acuerdo a los programas transitorios, pero se seguirá comercializando y utilizando, así como también los dos primeros que sin ser elaborados para esa época, son muy utilizados por los profesores por la escasa oferta de libros de texto de matemáticas para los temas de enseñanza secundaria.

5.2. Aplicación de las matrices a los libros de texto.

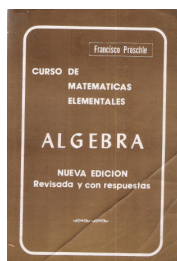
Los libros de texto que se examinarán en este capítulo son:

Tabla 5.1. Libros de texto examinados del período 1969 – 1981.

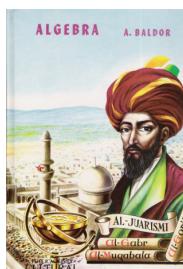
	Año	Edición	Título	Editorial
1a	1930	1	Curso de Matemáticas Elementales Álgebra correspondiente a los años 4°, 5° y 6° de humanidades. Conforme al programa oficial.	CERES
2a	1941	1	Álgebra**	Publicaciones Cultural S.A.
3a	1968	1	Álgebra. Enseñanza Media (Ex 3°, 4°, 5° y 6° Hdes.) y Pre-universitaria. Conforme al programa de 1969.	Universitaria S.A.
4a	1970	5	Matemáticas Álgebra 2° Año Educación Media Conforme a programas oficiales.	Universitaria S.A.
5ª	1974	1	Curso de Matemáticas elementales I.	Universitaria S.A.
6a	1979	1	Matemática II Médio.	INDEA

Cuyas portadas se presentan a continuación:

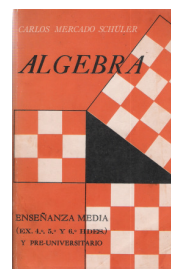
1a



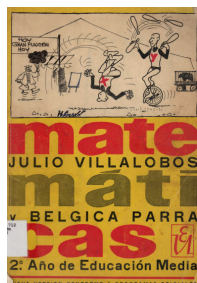
2a



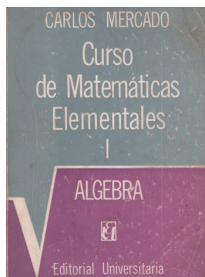
3a



4a



5a



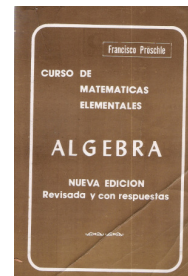
6a



5.2.1.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 1a.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El título de esta obra es “Curso de Matemáticas Elementales: Álgebra”. Es un libro nacional comercializado en el mercado particular.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

El autor es, uno de los profesores de matemáticas más conocidos en Chile, por este libro que ha sido utilizado por diferentes generaciones, pues data de la primera mitad del siglo XX y aún sigue siendo impreso y vendido como el original.

Profesor de matemáticas del Instituto Nacional y de la Escuela Militar.

- **MIGt3: Edición y Tipo de Obra.**

La primera edición de este libro cuyo tipo es un compendio con múltiples temas de álgebra pensado para los cursos 4°, 5° y 6° año del entonces ciclo de humanidades, aparece en enero de 1930 bajo este nombre. Sin embargo, esto ocurre bajo el título que describimos “Curso de Matemáticas Elementales Álgebra”, que corresponde según se señala en su prefacio, al tercer volumen que completa una obra previa no de el autor, sino de su amigo y colega, a quien pertenece la autoría de los dos primeros ligados al estudio de la geometría. Estos dos autores, forman una dupla de autores de inicios del siglo XX en Chile, que dan los primeros trazos de una obra de este tipo en nuestro país.

Indagando un poco más en la historia, encontramos un libro fechado en 1917 por la autoría de su amigo el que ya trae muchos de los ejercicios que el autor informa en el prefacio tomó con permiso de este.

No se da cuenta del número de edición revisada, pero si seguido del prefacio se informa de la acomodación de las materias en el texto para que cumpla con lo planteado en el “nuevo programa oficial” que indica comienza a regir en 1966 para IV año, 1967 para V año y en 1968 para VI año, aludiendo que el orden si, tal como lo manifestara el autor, no obedece al dado al programa oficial. Por tanto, la edición que revisaremos es la que se utiliza en el primer período de esta investigación, desde los nuevos programas impuestos por la reforma educacional de 1965. No se atribuye en esta edición nombre al cual asignar las posibles modificaciones hechas al original de el autor. Edita e imprime esta versión Ediciones CERES sin mayor información de fecha.

- **MIGt4: Presentación física.**

El libro contiene 477 páginas en papel roneo cuyas dimensiones son de 12 cm por 17,6 cm. La impresión es sólo en negro.

5.2.1.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 1a.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Al revisar el índice que trae en sus últimas páginas, se observa que los contenidos aparecen agrupados en tres grandes secciones, llamadas Primera Parte, Segunda Parte y Tercera Parte, las que corresponden a las temáticas del programa oficial del cuarto, quinto y sexto año de humanidades respectivamente, señalando con * aquellas que trae la obra y que aún no están presentes en los programas que por aquellos años eran de transición.

Más que su organización en partes, interesa describir los 21 capítulos que componen el libro de texto y que presentamos en la siguiente tabla:

Tabla 5.2. Organización temática del texto 1a.

Capítulo	Nombre	Descripción
I	Introducción	Estudia la notación y expresiones algebraicas, hasta términos semejantes.
II	Adición y sustracción	Estudia la Adición y sustracción de monomios y polinomios, además de ecuaciones aditivas y problemas verbales.
III	Multiplicación	Estudia la multiplicación y factorización de polinomios, ecuaciones multiplicativas y problemas verbales.
IV	División	Estudia la división de potencias, de fracciones, de polinomios, ecuaciones con fracciones y problemas verbales.
V	Desigualdades e inecuaciones	Breve capítulo en que se desarrollan las propiedades de orden en \mathbb{R} , además de sencillas inecuaciones de primer grado.
VI	Sistemas de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos y tres incógnitas	Estudia los sistemas 2×2 y 3×3 de primer grado y problemas verbales relacionados.
VII	Proporciones	Estudia razones, proporciones y variabilidad proporcional, ecuaciones con forma de proporción.
VIII	Representación gráfica	Estudia la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas, además de resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales 2×2 .
IX	Variación proporcional	Estudia la proporcionalidad directa e inversa.
X	Potencias	Estudia las potencias de exponente entero y sus propiedades.
XI	Raíces	Estudia los radicales, sus propiedades y su relación con las potencias y los logaritmos.
XII	Ecuaciones de segundo grado con una incógnita	Estudia la ecuación de segundo grado, su resolución, las propiedades de sus raíces, la gráfica de la función cuadrática y problemas verbales asociados.
XIII	Sistemas sencillos de ecuaciones de segundo grado	Breve presentación de tres tipos de sistemas sencillos de segundo grado.
XIV	Sistemas de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos y tres incógnitas	Presenta una mayor amplitud que lo desarrollado en el capítulo VI. Estudia los diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 .
XV	Algunos sistemas sencillos de ecuaciones de segundo grado	Este capítulo conforma una continuación del capítulo XVIII.
XVI	Representación gráfica	Es una repetición de lo expuesto en el capítulo VIII.
XVII	Logaritmos	Estudia el concepto de logaritmo en distintas bases y sus propiedades.
XVIII	Progresión Aritmética	Estudia la progresión aritmética y sus propiedades, incorporando problemas de enunciado asociados.
XIX	Progresión Geométrica	Estudia la progresión geométrica y sus propiedades, incorporando problemas de enunciado asociados.
XX	Interés compuesto	Estudia el concepto de interés compuesto y problemas verbales asociados.
XXI	Anualidades	Estudia el concepto de anualidad y problemas asociados.

Según esta organización de contenidos, será de interés examinar los capítulos XI y XII. En especial, el XI que contiene 35 de las 477 páginas a los radicales en ambiente algebraico como objeto de estudio, esto es cerca del 7% del texto destinado a este contenido.

• **MACT2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

La presentación que hace de los contenidos se acerca a lo que he denominado como axiomática, pues en la mayoría de los casos parte con la definición del objeto, seguido de ejemplos y luego ejercicios. Los matices que se pueden encontrar ocurren en algunas introducciones en las que previo a formular la institucionalización, da algunos ejemplos particulares para dar paso a la generalización.

En cuanto al tipo de actividades, la mayoría son de rutina, salvo tres secciones de “ejercicios de recapitulación” que ofrecen un mayor grado de dificultad de sus actividades, pero el peso de estas en cantidad está muy por debajo de la totalidad de ejercicios de las sesiones de práctica que hay luego de cada temática tratada. Por esto, se le asigna la categoría de Mecanicista, quedando entonces caracterizado por el par (A, M).

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Como indicamos en el campo MACT1, aproximadamente el 7% del libro se ocupa de los radicales en el capítulo XI denominado “Raíces”, con una extensión de 35 páginas. Su organización interna en subtítulos es:

- 1) Definición (de raíz).
- 2) Extraer raíz de un producto.
- 3) Multiplicar raíces del mismo índice.
- 4) Números irracionales.
- 5) Extraer raíz de un cuociente.
- 6) Dividir raíces del mismo índice.

- 7) Raíz de una potencia.
- 8) Raíz de una raíz.
- 9) Signos de una raíz.
- 10) Extracción de raíz cuadrada.
- 11) Ecuaciones irracionales.

Se observa que los títulos 4) y 11) son los únicos que corresponden al ámbito aritmético y no serán analizados en profundidad por la misma razón. Llama la atención que estos temas estén dispuestos en lugares apartados, pudiendo estar juntos al inicio como para dar una secuencia inductiva del paso de la aritmética al álgebra.

• **MACT4: Presentación de los radicales.**

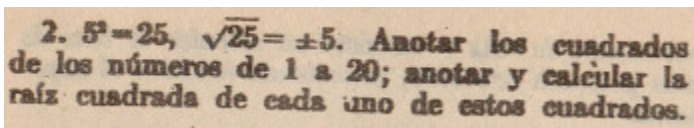
Los radicales son introducidos con la definición de lo que llama “raíces” al iniciar la unidad XI. He aquí la presentación:

<p style="text-align: center;">RAICES.</p> <p>62. <i>Definición.</i>—Calcular el valor de la incógnita x en la ecuación $x^2=9$ es buscar un número que elevado al cuadrado, es decir, que multiplicado por sí mismo, sea igual a 9. Este número es $+3$ y -3, porque $(+3)^2=9$ y $(-3)^2=9$.</p> <p>El valor de x se anota así:</p> $x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$ <p>y se lee x igual a más menos raíz cuadrada de 9.</p> <p>En la ecuación:</p> $x^n = c$ <p>se trata de buscar un número x que elevado a n, sea igual a c. El valor de x se indica así:</p> $x = \sqrt[n]{c}$ <p>y se lee x igual a raíz n de c.</p> <p>La operación que se ejecuta para determinar el valor de x en estas dos ecuaciones, se llama</p>	<p><i>extracción de raíz y consiste en calcular la base de una potencia conocida, conociendo también el exponente.</i></p> <p>La potencia conocida se llama <i>cantidad subradical</i> o <i>radicando</i> (9 y c en los ejemplos); el exponente es el <i>grado</i> o <i>índice de la raíz</i> (2 y n), y la base que se busca, o sea el resultado de la operación se llama <i>raíz</i> (± 3 y $\sqrt[n]{c}$). El signo de la extracción de raíz es $\sqrt{\quad}$ (radical). El índice 2 no se escribe y la raíz de índice 2 se llama <i>raíz cuadrada</i>.</p> <p>Así \sqrt{a} se lee <i>raíz cuadrada de a</i>.</p> <p>La raíz de índice 3 se llama <i>raíz cúbica</i>.</p> <p>La extracción de raíz es una operación inversa o contraria de la elevación a potencia. Por esto un número no altera si se extrae raíz y se le eleva a potencia de exponente igual al índice de la raíz; por consiguiente, las identidades que siguen contienen la definición de raíz.</p> $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
---	--

Comienza definiendo el concepto de raíz mediante la resolución de una ecuación tomando la acepción de raíz como solución de una ecuación. Confunde implícitamente sin duda, el concepto de raíz con el de radical (que no lo utiliza).

Como consecuencia de la notación $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, se puede inferir que $\sqrt{9} = 3$, lo que es correcto, pero luego indica que: “El resultado de la operación se llama raíz, es decir, ± 3 ”, por tanto para el autor, la extracción de raíz es una operación con dos resultados.

En el último párrafo de la definición, en tanto, muestra que $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$, sin condición alguna para a . Un contraejemplo de esto es, a saber: $(\sqrt{(-2)})^2 = \sqrt{(-2)^2} = 2$. Luego, da una lista de ejercicios, entre los cuales se encuentra el siguiente:



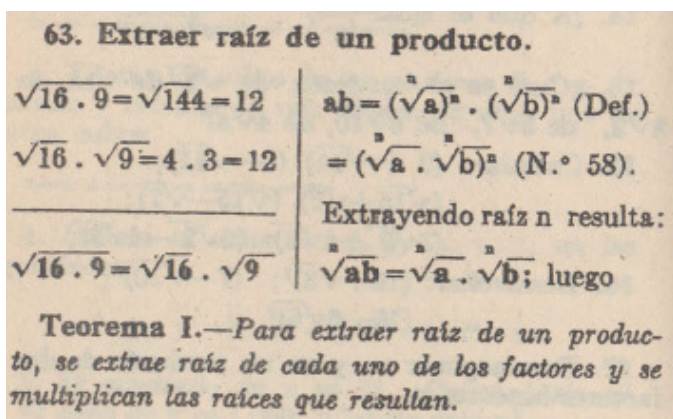
2. $5^2=25$, $\sqrt{25}=\pm 5$. Anotar los cuadrados de los números de 1 a 20; anotar y calcular la raíz cuadrada de cada uno de estos cuadrados.

La ejemplificación $5^2 = 25$, $\sqrt{25} = \pm 5$, pone de manifiesto el uso del doble signo, y además la contradicción con la escritura mostrada anteriormente cuando resuelve la ecuación y anota $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, pues por una parte se tendría $\pm\sqrt{9} = \pm 3$, que hace pensar en $\sqrt{9} = 3$ y por otra $\sqrt{9} = \pm 3$. Hay otros ejercicios en que pide calcular sumas por diferencias numéricas como $(\sqrt{15} + \sqrt{7})(\sqrt{15} - \sqrt{7})$, en que requiere del álgebra de radicales que es abordado más adelante. Observando el solucionario del final del texto, en estas operaciones sólo toma los valores positivos.

En resumen, no emplea el concepto de radical o de raíz aritmética o principal. A las expresiones que usan el signo radical les llama simplemente “raíces”. Tampoco hay extensión al caso $\sqrt[n]{0}$.

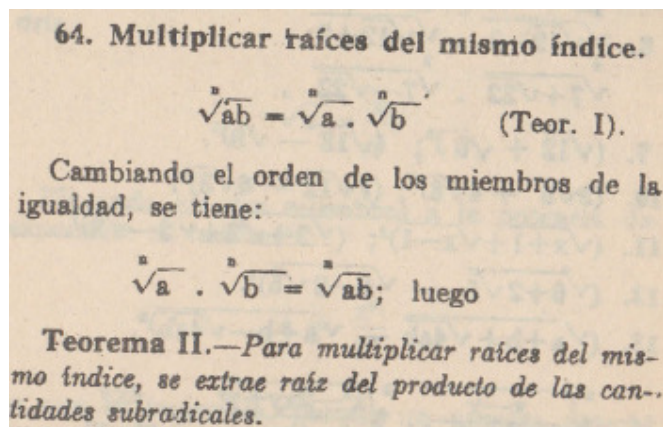
• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

Los próximos contenidos están ligados a la operatoria con radicales, que el autor llama “raíces”: “Extraer raíz de un producto” y “Multiplicar raíces del mismo índice”, aparecen en ese orden. El autor da un ejemplo particular y al lado una demostración para la extracción raíz de un producto, como sigue:



estudiado pero que tampoco da condiciones a los literales. Vemos que la demostración que hace, es correcta para radicandos no negativos.

La multiplicación de raíces de igual índice, la trabaja a partir de $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ pero intercambiando los miembros de la igualdad:



A partir del ejemplo, paralelamente da la demostración, la que no incluye restricciones para a , b y n . Se basa en el N.º 58, que es la propiedad de potencias $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, que en el capítulo anterior es

No hay demostración pues la considera igual que el teorema I. Aquí es importante señalar:

1. El signo igual no es tratado algebraicamente. No tendría porqué invertirse los miembros del teorema I para hallar el teorema II.

2. Al establecer dos teoremas, está fragmentando un mismo teorema en dos partes. Ayuda de este modo a los lectores a creer en una lectura en un sólo sentido de las expresiones que contienen el signo igual.

Antes de continuar con el álgebra de radicales, pasa a referirse a los Números irracionales, en que señala que “ $\sqrt{2}$ es un número irracional y $\sqrt{4}$ es un número racional”. En esta afirmación no se precisa si está considerándolos ambos con los dobles signos que los definió o con su valor positivo.

Continúa con la extracción de raíz de un cuociente y la división de raíces del mismo índice, repitiendo el mismo esquema de la relación que muestra entre la extracción de raíz de un producto y la multiplicación de raíces del mismo índice. Da a su vez un ejemplo y la demostración basada en la propiedad de potencias $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, que nuevamente no

aparece con restricciones para los literales. La demostración en tanto, recurre a las potencias, pero de modo correcto, pues las utiliza con exponentes enteros.

La siguiente propiedad que estudia es la “Raíz de una potencia”: En este tema, introduce la notación como potencia de una raíz, del siguiente modo:

67. Extraer raíz de un cuociente.

$\sqrt{\frac{144}{16}} = \sqrt{9} = 3$ $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}} = \frac{12}{4} = 3$ <hr style="width: 50%; margin: 5px auto;"/> $\sqrt{\frac{144}{16}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}}$	$\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}$ $= \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n \quad (\text{N.}^\circ 59).$ <p>Extrayendo raíz n, resulta</p> $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \text{ luego}$
---	---

Teorema IV.—Para extraer raíz de un cuociente o de una fracción, se extrae raíz de cada uno de sus términos y se dividen las raíces que resultan.

69. Raíz de una potencia.

$$\sqrt[n]{a^4} = \sqrt[n]{aaaa} \quad (\text{Def. de potencia})$$

$$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \quad (\text{N.º 63})$$

$$= \sqrt[n]{(a)^4} \quad (\text{Def. de potencia}): \text{ luego}$$

Teorema VI.—*Para extraer raíz de una potencia se extrae raíz de la base y se eleva esta raíz al exponente de la potencia.*

Según la definición de raíz, se tiene:

$$(1) \quad (\sqrt[n]{a^4})^n = a^4$$

Ahora como $\frac{4}{n} \cdot n$ es 4, se puede escribir:

$$(2) \quad \left(a^{\frac{4}{n}}\right)^n = a^4 \quad (\text{N.º 60}).$$

Las igualdades (1) y (2) tienen los segundos miembros iguales, los primeros también lo son; por consiguiente:

$$\left(\sqrt[n]{a^4}\right)^n = \left(a^{\frac{4}{n}}\right)^n$$

Se extrae raíz de los dos miembros y resulta:

$$\sqrt[n]{a^4} = a^{\frac{4}{n}}; \text{ luego}$$

Teorema VII.—*Toda raíz de una potencia es igual a la base de la potencia elevada al exponente partido por el índice de la raíz.*

Este teorema es aplicable en el cálculo solamente cuando el exponente de la potencia es divisible por el índice de la raíz; en el caso contrario resulta una potencia con exponente fraccionario.

Una potencia con exponente fraccionario se define como una raíz de índice igual al denominador del exponente y cuya cantidad subradical es la base elevada al numerador.

Como se puede ver, da una demostración para un caso particular (exponente de la cantidad subradical igual a 4), para llegar a establecer como teorema que (como escribe más adelante) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Éste saber escolar, además de no señalar ningún contexto numérico para los literales involucrados, desvirtúa el Saber Matemático, ya que, siguiendo la línea de este texto, en definiciones y teoremas, en el saber sabio, se define la raíz n - ésima de un número real positivo bajo cualquiera de las dos notaciones.

En efecto, de “Principios de Análisis Matemático” de W. Rudín (1953), extraemos el siguiente:

“Teorema: Para todo número real $x > 0$ y cada entero $n > 0$ hay un número real $y > 0$, y sólo uno, tal que $y^n = x$. Este número y se escribe $\sqrt[n]{x}$ o $x^{\frac{1}{n}}$ ”.

Así, Álgebra de Pröschle (como es conocido), utiliza propiedades de las potencias como $(a^n)^k = a^{nk}$ (probada para exponentes enteros) para exponentes

fraccionarios y peor aún emplea la frase “se extrae raíz a ambos miembros”, la que no es correcta, pues mirando el saber matemático, se tiene $(\forall a \in R)(\forall b \in R): a = b \Rightarrow a^n = b^n$, cuyo recíproco es en general, falso, por tratarse de una condición necesaria pero no suficiente.

A continuación expone que el cambio de notación que llama de raíz a una potencia de exponente fraccionario, “explica la amplificación y simplificación de una raíz”.

En efecto, se tiene:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot x}{n \cdot x}} = \sqrt[n \cdot x]{a^{m \cdot x}}$$

$$\text{y } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot x}{n \cdot x}} = \sqrt[n \cdot x]{a^{m \cdot x}}$$

¿Cómo se amplifica y se simplifica una raíz?

No se responde ni problematiza este asunto. Queda a la aventura del lector indagar en estos procedimientos, que además se muestran en toda su generalidad utilizando literales sin restricciones, lo que puede producir una serie de errores en su aplicación. Se sigue esto de un listado de ejercicios para automatizar estos conocimientos reglados.

Aprovecha la notación de potencia de una raíz para demostrar la propiedad “Raíz de una raíz” que desarrolla así:

70. Raíz de una raíz.

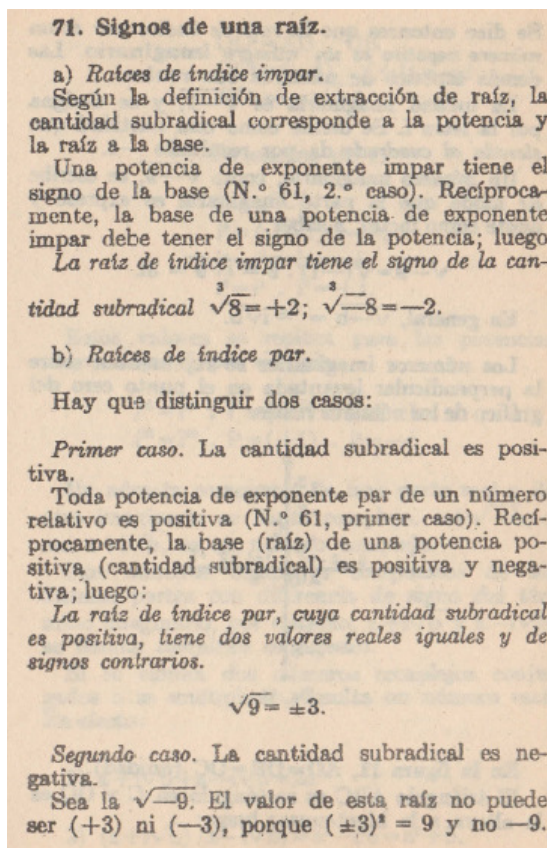
$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

En general: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$; luego

Teorema VIII.—Para extraer raíz de una raíz se extrae raíz de la misma cantidad subradical, pero de índice igual al producto de los índices.

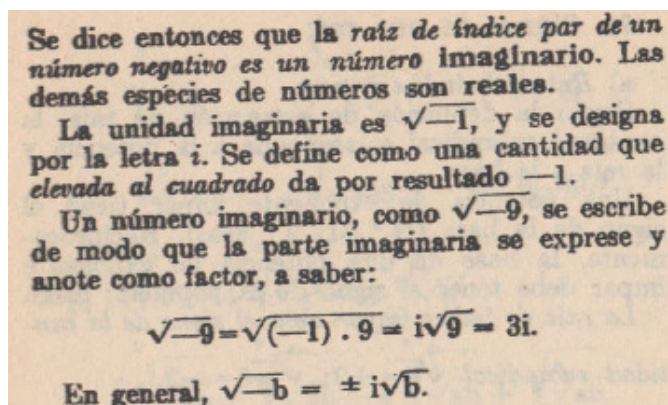
Nuevamente toma un caso particular, lo desarrolla y a partir de él, generaliza. Presenta luego una lista de ejercicios numéricos y literales, sin restricciones.

El siguiente tema que trata es “Signos de una raíz”, que desarrolla clasificando las raíces en aquellas de índice impar, y las de índice par. Examinando ésta última referencia, el texto dice:



En el primer caso, el autor reafirma que la raíz cuadrada tiene dos resultados, ya que manifiesta que $\sqrt{9} = \pm 3$, cuya justificación la encuentra en las potencias, específicamente como operación inversa de la elevación a potencia.

El segundo caso, permite observar la trascendencia del error conceptual. $\sqrt{-b} = \pm i\sqrt{b}$, deja en evidencia que el operador $\sqrt{\quad}$, es utilizado además en los números imaginarios con el mismo sentido de operación con dos resultados.



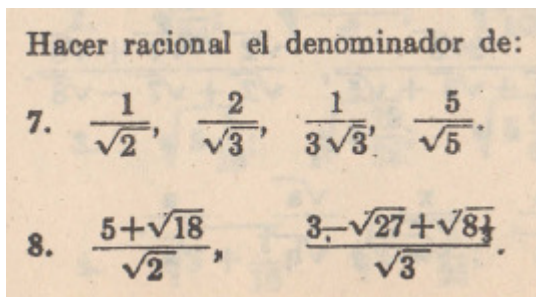
En los ejercicios de esta parte, el alumno debe extraer raíces (incluyendo situaciones como $\sqrt{-9}$). Al observar el solucionario, curiosamente las respuestas referidas a raíces de índice par NO están doble signadas.

El próximo título es “Extracción de raíz cuadrada”, en que el autor da el algoritmo para calcular a mano, la raíz cuadrada de un número positivo. Aquí, tampoco antepone el doble signo. Cabe preguntarse entonces, ¿Cuándo lo usa? Y ¿para qué lo presenta?. No hay respuesta a estas interrogantes en el texto.

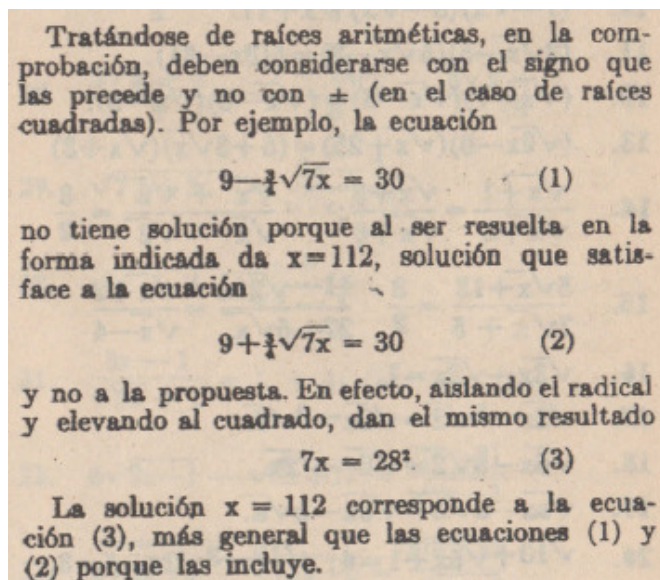
- **MACt6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Las aplicaciones que desarrolla son tres: La racionalización de denominadores, las ecuaciones con radicales y el uso de radicales en la resolución de ecuaciones cuadráticas puras.

De racionalización, no hay materia prima que extraer, pues sólo la menciona como instrucción y no vuelve a aparecer. No da ni las técnicas ni los fundamentos o significado del concepto de racionalización.



Finaliza el capítulo de “Raíces” con las denominadas “Ecuaciones irracionales”. Entrega el procedimiento de aislar un radical y elevar ambos miembros de la ecuación al índice de la raíz que se desea eliminar. Luego da la siguiente explicación:



Como se aprecia, introduce una noción no presentada antes (raíces aritméticas) que según la explicación alude (en su lenguaje) al resultado positivo de la raíz cuadrada. No ejemplifica cómo hacer la comprobación, es decir, es un conocimiento que da por hecho, y tampoco hace énfasis en la propiedad matemática de números reales que justifica el inesperado

encuentro de valores de x que no son necesariamente soluciones de la ecuación planteada, que dicho sea de paso, los estudiantes conocen por primera vez un algoritmo que a veces produce resultados no satisfactorios.

Por otra parte, de su explicación se entiende que siempre es posible elevar al cuadrado los dos miembros de una ecuación. Si resolvemos siguiendo las indicaciones de la página, $9 - \frac{3}{4}\sqrt{7x} = 30$ y paralelamente $9 + \frac{3}{4}\sqrt{7x} = 30$ tenemos:

1º aislamos el radical:

$$\begin{array}{ll} 9 - \frac{3}{4}\sqrt{7x} = 30 & 9 + \frac{3}{4}\sqrt{7x} = 30 \\ -\frac{3}{4}\sqrt{7x} = 21 & \frac{3}{4}\sqrt{7x} = 21 \\ \sqrt{7x} = -28 & \sqrt{7x} = 28 \end{array}$$

2º elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

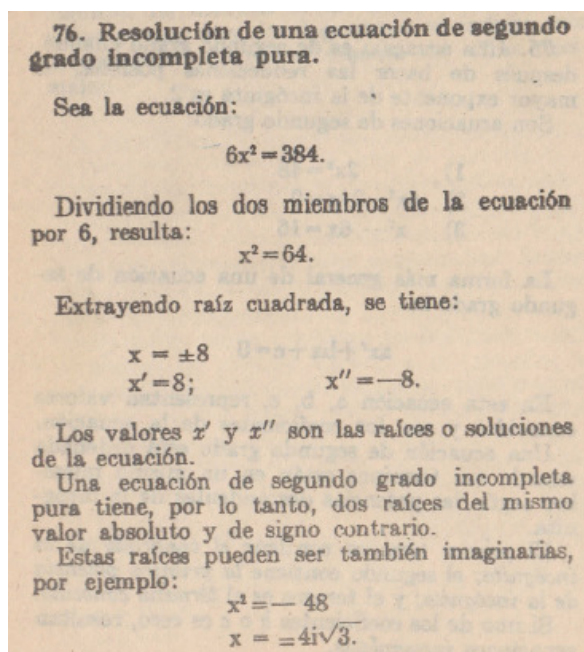
$$\begin{array}{ll} (\sqrt{7x})^2 = (-28)^2 & (\sqrt{7x})^2 = 28^2 \\ 7x = 784 & 7x = 784 \\ x = 112 & x = 112 \end{array}$$

Desde el Saber sabio, la ecuación de la izquierda no tiene solución, porque hay un paso en falso en el desarrollo. $\sqrt{7x} = -28$ es imposible, pues el recorrido de la función radical de orden dos son los números reales no negativos, luego no se puede continuar “elevando al cuadrado”. El autor a pesar que no aborda explícitamente la raíz cuadrada como función, al referirse al símbolo $\sqrt{\quad}$ como indicador de la operación inversa de la elevación al cuadrado, con dos resultados, propaga otro error conceptual, pues, de la operación monaria descrita por la “extracción de raíz cuadrada” el operador $\sqrt{\quad}$ debe ser función.

El texto propone una lista de 45 ecuaciones con radicales, todos cuadráticos, excepto $\sqrt[3]{x} = 2$. Las ecuaciones a que se derivan son tanto de primer como segundo

grado, a pesar de que según el índice del libro, éstas últimas conforman el capítulo siguiente.

En cuanto a las ecuaciones cuadráticas que se estudian en el capítulo XII, cada vez que en el texto se muestra la resolución de una ecuación de la forma $x^2 = a^2$, dice “extrayendo raíz cuadrada” y anota $x = \pm a$, lo que no permite entrever el paso intermedio, para saber si el doble signo lo antepone al operador $\sqrt{\quad}$ o bien si se desprende de él.



5.2.2.1 Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 2a.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El libro de texto se titula “Álgebra”, se comercializa en el mercado particular y es un texto extranjero cuya procedencia original es cubana, pero posteriormente siete años después, las nuevas ediciones son mexicanas.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

El autor de profesión abogado y profesor de Matemáticas. De origen cubano, nace en 1902 en La Habana y muere en Miami en 1978. Es autor de otras obras, entre ellas, los compendios de Aritmética y el de Geometría y Trigonometría.

- **MIGt3: Edición y Tipo de Obra.**

La obra pertenece originalmente a su autor, en 1941, pero a fines de la década de los 40, el autor vende los derechos a Publicaciones Cultural, empresa mexicana que llevaría a la venta este libro de texto desde Tijuana a la Patagonia. Es un compendio que aborda temas del álgebra elemental que gusta mucho a los profesores por la cantidad de ejercicios que contiene y todos con soluciones.

- **MIGt4: Presentación física.**

La obra tiene 578 páginas blancas impresas a color y sus dimensiones son 16,5 cm por 24 cm.

5.2.2.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 2a.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Se compone de 39 capítulos, de los cuales dos de ellos estudian el objeto matemático raíz cuadrada. El siguiente cuadro muestra los contenidos centrales de cada capítulo.

Tabla 5.3. Organización temática del texto 2a

Capítulo	Nombre
I	Suma.
II	Resta.
III	Signos de agrupación.
IV	Multipliación.
V	División.
VI	Productos y cuocientes notables.
VII	Teorema del residuo.
VIII	Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.
IX	Problemas sobre ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.
X	Descomposición factorial.
XI	Máximo común divisor.
XII	Mínimo común múltiplo.
XIII	Fracciones algebraicas. Reducción de fracciones.

XIV	Operaciones con fracciones algebraicas.
XV	Ecuaciones numéricas algebraicas de primer grado con una incógnita.
XVI	Ecuaciones literales de primer grado con una incógnita.
XVII	Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado.
XVIII	Fórmulas.
XIX	Desigualdades e inecuaciones.
XX	Funciones.
XXI	Representación gráfica de las funciones.
XXII	Gráficas. Aplicaciones prácticas.
XXIII	Ecuaciones indeterminadas.
XXIV	Ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas.
XXV	Ecuaciones simultáneas de primer grado con tres o más incógnitas.
XXVI	Problemas que se resuelven por ecuaciones simultáneas.
XXVII	Estudio elemental de la teoría combinatoria.
XXVIII	Potenciación.
XXIX	Radicación.
XXX	Teoría de los exponentes.
XXXI	Radicales.
XXXII	Cantidades imaginarias.
XXXIII	Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
XXXIV	Problemas que se resuelven por ecuaciones de segundo grado.
XXXV	Teoría de las ecuaciones de segundo grado.
XXXVI	Ecuaciones binomias y trinomios.
XXXVII	Progresiones.
XXXVIII	Logaritmos.
XXXIX	Interés compuesto. Amortizaciones. Imposiciones.

Incorpora además un apéndice con tablas de interés compuesto, cuadro de las formas básicas de descomposición factorial y una tabla de potencias y raíces, seguido de todas las respuestas a los ejercicios del texto.

Tres son los capítulos que será abordados en detalle y que exponen como objeto de estudio a los radicales en el ambiente algebraico. Se trata de los capítulos XXIX “Radicación”, XXX “Teoría de los exponentes” y XXXI “Radicales”, además de pequeñas observaciones en otros capítulos respecto al concepto de raíz y al de radical en su estatus de objeto - herramienta.

- **MACT2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

El texto se desarrolla por medio de subtítulos numerados con escritura indo arábica encerrado en un círculo, numeración que trasciende los capítulos. Así se encuentra que al inicio de la página 5, aparece el primer subtítulo 1 llamado “Álgebra” y donde da un significado para este término, hasta que en la página 527 da el último que se numera 504 “Deducción de la fórmula de las imposiciones”. De igual modo ocurre con las actividades propuestas, que llama “ejercicios” y que se numeran en el texto hasta el “Ejercicio 305”.

Lo anterior ilustra que la exposición de los contenidos es entendida de modo axiomático; primero se da el concepto, la definición, el procedimiento o una simple descripción de una regla, se establecen ejemplos y en otros casos con o sin las demostraciones, y luego se establece una serie de ejercicios en su mayoría a nivel instrumental, persiguiendo la adquisición de una regla por medio de la aplicación memorística, por tanto, asignamos el par (A, M) a esta obra, ya que su presentación de contenidos es axiomática respecto del contenido y mecánica respecto del conjunto de actividades.

- **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Como son tres los capítulos esenciales que se examinan en este libro, he preferido organizar los contenidos que en ellos se trabajan en la siguiente tabla a tres columnas, permitiendo así una mejor visualización del hábitat en que el autor deja a los radicales.

Al final de la tabla, se encuentra para cada columna (capítulo) la cantidad de páginas respecto del total del libro destinadas a sus respectivos desarrollos.

Tabla 5.4. Capítulos en que se desarrollan los radicales como objeto de estudio.

XXIX Radicación	XXX Teoría de los exponentes	XXXI Radicales
1) Raíz. 2) Expresión radical o radical. 3) Signos de las raíces. 4) Cantidad imaginaria. 5) Cantidad real. 6) Valor algebraico y valor aritmético de un radical. 7) Raíz de una potencia. 8) Raíz de un producto de varios factores. 9) Raíz cuadrada de polinomios enteros. 10) Raíz cuadrada de polinomios con términos fraccionarios. 11) Raíz cúbica de polinomios enteros. 12) Raíz cúbica de polinomios con términos fraccionarios.	1) Exponente cero. Origen. 2) Exponente fraccionario. Origen. 3) Exponente negativo. Origen. 4) Pasar los factores del numerador de una expresión al denominador o viceversa. 5) Transformar una expresión con exponentes negativos en una expresión equivalente con exponentes positivos. 6) Ejercicios sobre expresiones con exponentes cero, negativos o fraccionarios. 7) Valor numéricos de expresiones algebraicas con exponente cero, negativos o fraccionarios. 8) Multiplicación de monomios con exponentes negativos o fraccionarios. 9) Multiplicación de polinomios con exponentes negativos o fraccionarios. 10) División de monomios con exponentes negativos o fraccionarios. 11) División de polinomios con exponentes negativos o fraccionarios. 12) Potencias de monomios con exponentes negativos o fraccionarios. 13) Potencias de polinomios con exponentes negativos o fraccionarios. 14) Raíces de polinomios con exponentes negativos o fraccionarios. 15) Raíz cuadrada de un polinomio con términos fraccionarios usando la forma de exponentes negativos.	1) Radical. 2) Radicales semejantes. 3) Reducir un radical. 4) Simplificar un radical. 5) Reducción de radicales semejantes. 6) Operaciones con radicales. 7) Multiplicación de radicales. 8) División de radicales. 9) Radicación de radicales. 10) Racionalización. 11) Ecuaciones con radicales.
12 páginas	17 páginas	18 páginas

En total cerca de 47 páginas de 577, esto es, aproximadamente el 8% de las páginas del libro están destinadas a divulgar el objeto la radicación en el ambiente algebraico.

- **MACT4: Presentación de los radicales.**

Algunas referencias a los conceptos de raíz y de radical los encontramos mucho antes de los capítulos que serán examinados en detalle y que se anunciarán en el campo anterior.

En efecto, la primera alusión aparece en los llamados “Preliminares”, que corresponde a un desarrollo de nociones algebraicas a modo de diccionario para el lenguaje algebraico. Así llegamos al subtítulo 6 “signos de operación” en que además de los signos de las cuatro operaciones básicas y el de potencia, introduce el siguiente:

El **Signo de Raíz** es $\sqrt{\quad}$, llamado **signo radical**, y bajo este signo se coloca la cantidad a la cual se le extrae la raíz. Así, \sqrt{a} equivale a **raíz cuadrada** de a , o sea, la cantidad que elevada al cuadrado reproduce la cantidad a ; $\sqrt[3]{b}$ equivale a **raíz cúbica** de b , o sea la cantidad que elevada al cubo reproduce la cantidad b .

El autor considera aquí el signo radical como un operador, que indica que hay que extraer raíz del índice que según aparezca, al número que se tiene bajo ese signo. Es una noción muy breve sin mayor desarrollo que no alcanza a tratar la raíz n -ésima. Hasta aquí la mirada es más bien aritmética y no algebraica, puesto que dice en singular que equivale a raíz cuadrada o cúbica, inclinándose por una implícita unicidad, a pesar que su noción de cantidad la refiere a números positivos y también a negativos.

La cita anterior la contrastamos ahora con otra que aparece en el capítulo VIII “Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita”, en la que bajo el subtítulo 110 “Raíces o soluciones”, señala:

110 RAICES O SOLUCIONES de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o **satisfacen** la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en **identidad**.

Así, en la ecuación $5x - 6 = 3x + 8$

la raíz es 7 porque haciendo $x = 7$ se tiene

$$5(7) - 6 = 3(7) + 8, \text{ o sea } 29 = 29,$$

donde vemos que 7 **satisface** la ecuación.

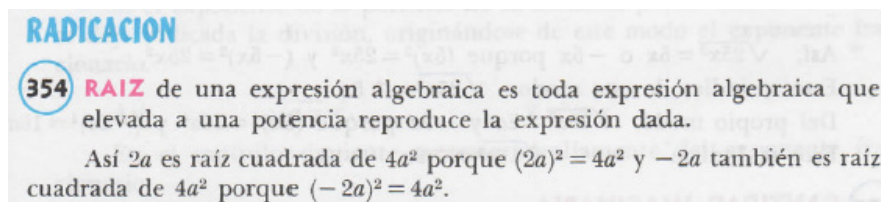
Las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen una sola raíz.

La palabra raíz aparece en estos dos discursos con significados distintos, primero citada por el autor como un número (cantidad que reproduce el radicando) y luego como un conjunto de números (raíces de la ecuación), pero en ninguno se establece la diferencia o se aclara lo que podría ocasionar una confusión. Ambas citas se ubican antes de los capítulos que se analizarán en detalle, por lo que la pregunta que queda es acerca de la necesidad de instalar estos conceptos tan prematuramente. Al menos al observar las temáticas tratadas en tales puntos, no se requiere aún el concepto de raíz

para la solución de una ecuación, más aún de primer grado, pues el concepto de raíz que se generaliza en la teoría de ecuaciones a nivel erudito, tiene un constructo deductivo en el edificio matemático, pero su transposición al aula, no se organiza de igual modo en la matemática escolar, más aún, cuando se trabaja con ecuaciones de primer grado, de modo independiente de las de otros grados y cuyo fin no es organizar la enseñanza de las ecuaciones de modo consecutivo en relación a sus grados sin hacer intervenir otras temáticas intermedias, como aparece el concepto de radical y el de raíz como objeto intermedio entre las ecuaciones lineales y las cuadráticas.

Introduciéndonos en los capítulos que analizaremos en detalle, que tratan la radicación, la teoría de exponentes y los radicales, se tienen las siguientes presentaciones de los conceptos de raíz y de radical:

En el capítulo de radicación, se observan las siguientes situaciones:



La definición es plausible con el Saber matemático, sin embargo, un par de párrafos más abajo siguiendo el discurso escrito, da la notación con el signo radical y sus términos (índice y cantidad subradical):

Así, $\sqrt{a^4}$ significa una cantidad que elevada al **cuadrado** reproduce la cantidad subradical a^4 ; esta raíz es a^2 y $-a^2$ porque $(a^2)^2 = a^4$ y $(-a^2)^2 = a^4$.

Ya está presente el error conceptual. Incorpora el operador $\sqrt{\quad}$ y muestra que tiene dos valores asociados. Por otra parte, aparece luego en el subtítulo 355 el concepto de radical, en el que partiendo bien, genera una confusión:

355 EXPRESION RADICAL O RADICAL es toda raíz indicada de un número o de una expresión algebraica. Así, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{9a^3}$, $\sqrt[4]{16a^3}$ son expresiones radicales.

Si la raíz indicada es exacta, la expresión es **racional**; si no es exacta, es **irracional**.

Las expresiones irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3a^2}$ son las que comúnmente se llaman **radicales**.

Aquí radical lo conceptualiza como una notación que utiliza el signo $\sqrt{\quad}$, sea de índole numérico o algebraico, pero cuando menciona que expresiones irracionales son las comúnmente llamadas radicales, no repara en la unicidad y pertenencia a \mathbb{R} de estos objetos. Por lo demás, la expresión $\sqrt[3]{3a^2}$ para $a = 3$, no representa un irracional.

Otro problema aparece ya en el siguiente apartado, donde institucionaliza la notación del doble signo, en el siguiente subtítulo y su exposición:

356 SIGNOS DE LAS RAICES

1) Las raíces impares de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad subradical.

Así, $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$ porque $(3a)^3 = 27a^3$.
 $\sqrt[3]{-27a^3} = -3a$ porque $(-3a)^3 = -27a^3$.
 $\sqrt[5]{x^{10}} = x^2$ porque $(x^2)^5 = x^{10}$.
 $\sqrt[5]{-x^{10}} = -x^2$ porque $(-x^2)^5 = -x^{10}$.

2) Las raíces pares de una cantidad positiva tienen doble signo:

+ -
 Así, $\sqrt{25x^2} = 5x$ o $-5x$ porque $(5x)^2 = 25x^2$ y $(-5x)^2 = 25x^2$.
 Esto se indica de este modo: $\sqrt{25x^2} = \pm 5x$.
 Del propio modo, $\sqrt[4]{16a^4} = 2a$ y $-2a$ porque $(2a)^4 = 16a^4$ y $(-2a)^4 = 16a^4$.
 Esto se indica: $\sqrt[4]{16a^4} = \pm 2a$.

Para este autor, no hay diferencia entre raíz cuadrada como solución de una ecuación y la raíz cuadrada positiva de un número o radical cuadrado. Además, en una parte de su exposición señala que $\sqrt{25x^2} = 5x$ o $-5x$ y luego $\sqrt[4]{16a^4} = 2a$ y $-2a$, entonces da lo mismo utilizar los conectores lógicos o, y.

Cabe la posibilidad que para el autor, así como afirman algunos profesores, la raíz cuadrada la consideran como una “operación con dos resultados”. Al respecto, en el siguiente subtítulo crea una distinción para efectos de cálculo, llamando Valor algebraico de un radical a las dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, etc. de una cantidad, mientras que el valor aritmético de un radical corresponde al valor real y positivo, si existe, o al valor real negativo si no existe el positivo ejemplificando que $\sqrt{9} = \pm 3$, pero el valor aritmético de $\sqrt{9}$ es $+3$. Es clave la frase que cierra este discurso:

“Al tratar de radicales, siempre nos referiremos a su valor aritmético”

Esta declaración da a entender que el uso del signo radical implica tomar el correcto significado para el uso de números concretos y no generalizados mediante literales.

Existe un doble discurso para dotar de significado a expresiones que contengan $\sqrt{\quad}$. Una como hemos visto es la de operación de extracción de raíz, para lo cual en el caso de índices pares, luego de realizar la extracción considera doble signo, hallando los dos valores algebraicos reales. Por otro lado, define como radical la expresión numérica o algebraica que representaría un irracional, esto es, una extracción de raíz indicada en que no es posible hacer tal extracción por no existir otra expresión para denotar su valor sin utilizar el signo radical.

De estos dos conceptos que involucra, el de radical es correcto en razón al empleo del signo radical, para lo cual como veremos más adelante, en el capítulo XXXI “Radicales” no emplea doble signo, pero sí lo usa en el presente capítulo que examinamos, donde su tema es la radicación, entendida como extracción de raíz. El problema que surge, es entonces, cómo se identifica cuando utilizar una u otra acepción. Si $\sqrt{3a}$ representa un radical, por no poder extraerse raíz quedando sólo indicada como

se especifica en el texto, ¿qué se hace si se precisa hacer $a = 3$?, se toman los dos valores algebraicos o el aritmético, o si se cambia a por b^2 ?. Estas interrogantes no pueden ser contestadas con la claridad que se presenta en el texto.

El siguiente subtítulo “Raíz de una potencia” proporciona la relación entre raíces y potencias de exponente fraccionario:

360 RAÍZ DE UNA POTENCIA

Para extraer una raíz a una potencia se divide el exponente de la potencia por el índice de la raíz.

Decimos que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

En efecto: $\left(\frac{m}{n}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$, cantidad subradical.

Aplicando esta regla, tenemos:

$$\sqrt[4]{a^8} = a^{\frac{8}{4}} = a^2, \quad \sqrt[9]{x^9} = x^{\frac{9}{9}} = x^1 = x.$$

Si el exponente de la potencia **no es divisible** por el índice de la raíz, se deja indicada la división, originándose de este modo el **exponente fraccionario**.

Así, $\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$, $\sqrt{x^2} = x^{\frac{2}{2}}$.

En el capítulo siguiente se trata ampliamente del exponente fraccionario.

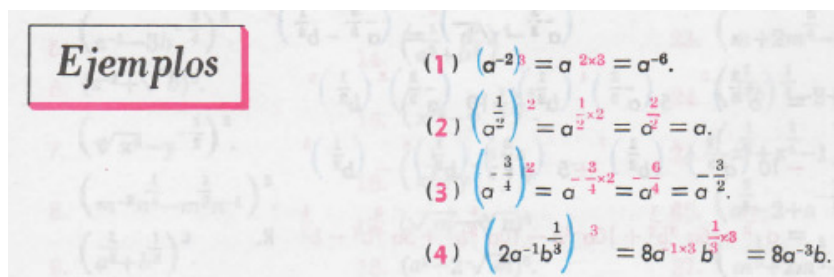
De este modo, en el texto se da una regla cuya justificación posee errores lógicos, pues se asumen también (sin suponerlo si quiera para hacer la extensión) que la propiedad $(a^n)^k = a^{nk}$ es válida no sólo para exponentes enteros, sino también para exponentes racionales cualesquiera. Además, no hay restricciones para los literales involucrados.

Haciendo caso de la invitación de la última línea para ver cómo se tratan las potencias de exponente fraccionario en el capítulo siguiente llamado “Teoría de exponentes”, se encuentra la interpretación del exponente fraccionario como aquella expresión que “equivale a una raíz cuyo índice es el denominador del exponente y la cantidad subradical la misma cantidad elevada a la potencia que indica el numerador del exponente”. Una relación absolutamente impuesta y que como ya vimos, busca una justificación en una generalización que es propia de los escolares, cuando no se

enfatan las restricciones en el uso de literales en la institucionalización de las propiedades y definiciones de los objetos transpuestos en la matemática escolar.

En el desarrollo de este capítulo se encuentran temáticas en que se trabaja con los exponentes cero, negativos y fraccionarios. De los apartados que contiene, merecen mención algunos en que se detectan ciertos descuidos, al omitir información de los campos de validez en que se cumplen algunas transformaciones algebraicas.

En el apartado 378 “Potencias de monomios con exponentes cero, negativos o fraccionarios”, muestra ejemplos a un nivel netamente instrumental que omite además los campos de validez:



Ejemplos

- (1) $(a^{-2})^3 = a^{2 \times 3} = a^{-6}$.
- (2) $(\frac{1}{a^2})^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a^1 = a$.
- (3) $(\frac{-3}{a^4})^2 = a^{\frac{-3}{4} \times 2} = a^{-\frac{6}{4}} = a^{-\frac{3}{2}}$.
- (4) $(2a^{-1}b^{\frac{1}{3}})^3 = 8a^{-1 \times 3} b^{\frac{1}{3} \times 3} = 8a^{-3}b$.

Obsérvese cómo estos ejemplos requieren de la especificación de bases positivas y su implicancia para el desarrollo de ejercicios como el que aparece el tercero de la

sección Ejercicio 227: $(a^{\frac{3}{2}})^2$ en que no se profundiza en las condiciones para que

$$(a^b)^c = a^{bc} = a^{cb} = (a^c)^b.$$

La relación es clara aquí: Se menciona el concepto de raíz y se trabaja todo el capítulo con números positivos y en la mayoría de los casos con literales, sin dar restricciones.

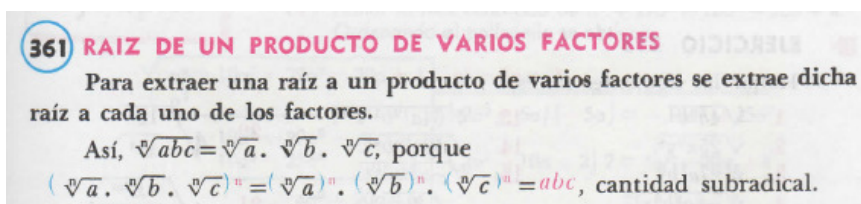
Pasando al siguiente capítulo, el de Radicales, se observa en tanto que en la definición de radical se repite la ya dada en el apartado 355 del texto, en que señala “si una raíz indicada es exacta, tenemos una cantidad racional, y si no lo es, irracional. Así, $\sqrt{4a^2}$ es una cantidad racional y $\sqrt{3a}$ es irracional. Las raíces indicadas inexactas o cantidades irracionales son los radicales propiamente dichos”.

Con esto, el autor llama irracional (o también radical) a todo aquello que no se puede expresar sin el símbolo $\sqrt{\quad}$, como hace con $\sqrt{3a}$, y no da lugar al tipo de número que representa a . Este es un nuevo gran error, pues para infinitos valores de a como por ejemplo, $a = 12$, se tiene $\sqrt{3a} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$ ¡que es un número racional!.

En resumen, hemos visto que en este libro de texto las expresiones que utilizan el signo radical, pueden ser llamadas, raíces, radicales e incluso irracionales.

• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

La primera propiedad que presenta el libro de texto se ubica en el capítulo XXIX de radicación, en la que se expone lo siguiente:



Restricciones no se dan, que en rigor debieran especificar que los radicandos deben ser no negativos y la prueba se basa en la relación inversa de la potenciación y la radicación que dieran al inicio del capítulo, por tanto, no incurre en errores de secuenciación lógica. Luego aplica este teorema para la extracción de raíz de un monomio. Llama la atención la insistencia del uso del doble signo, es decir, la firmeza del error, al indicar “Si el índice del radical es impar, la raíz tiene el mismo signo de la

cantidad subradical, y si el índice es par y la cantidad subradical positiva, la raíz tiene el doble signo \pm ". Así instala que por ejemplo, $\sqrt{9a^2b^4} = \pm 3ab^2$.

Posteriormente da un algoritmo para extraer raíz cuadrada de polinomios, donde curiosamente no emplea el doble signo.

En el capítulo de "Radicales", la primera propiedad que aparece es la simplificación de radicales, con la que permite hacer la transformación de notación $\sqrt{a^2b}$ en $a\sqrt{b}$, en la que no hay restricción alguna para los literales. En este capítulo, no comete el error del doble signo, pues como se ha dicho ya, en su definición de radical, interviene sólo el valor aritmético que le asigna al signo radical.

La simplificación del radical la distingue en dos casos: Cuando la cantidad subradical contiene factores cuyos exponentes son divisibles por el índice, caso en que la simplificación la basa en la propiedad de "raíz de un producto" y cuando la cantidad subradical contiene factores cuyos exponentes tienen divisores comunes con el índice del radical, caso en que los procedimientos corresponden a transformaciones de la expresión radical a expresión de potencia con exponente fraccionario, paso delicado que requiere de la utilización de bases positivas, por la composición de funciones que está allí involucrada. Sin embargo, no hay referencia alguna a los dominios de validez ni en los ejemplos, institucionalizaciones ni en los ejercicios propuestos. Luego trata la "introducción de cantidades bajo el signo radical", en la que presenta el procedimiento inverso a la simplificación de radicales. Nuevamente no hay restricciones y muestra algunos ejemplos para finalmente proponer su listado de ejercicios.

La siguiente regla que es enunciada con letra en negrita, comprende el concepto de "radicales equivalentes", concepto que no está tratado en el texto. Éste concepto como aparece aquí en el texto descrito, se refiere a que dos radicales $a^{\frac{p}{q}}$ y $a^{\frac{pr}{qr}}$ con

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Z}$, son equivalentes por corresponder a una notación distinta de un mismo número. Este hecho que es correcto en Matemáticas, requiere aún más de restringir la base a a los reales positivos, de modo que se corresponda con la definición de la función exponencial $x \rightarrow a^x$.

Ésta es la presentación que hace:

III. REDUCCION DE RADICALES AL MINIMO COMUN INDICE

387 Esta operación tiene por objeto convertir radicales de distinto índice en radicales equivalentes que tengan el mismo índice. Para ello, se aplica la siguiente:

REGLA
Se halla el m. c. m. de los índices, que será el índice común, y se eleva cada cantidad subradical a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice de su radical.

No hay ningún tipo de restricción y se enuncia la regla sin justificación alguna. Por otra parte, todos los ejercicios y ejemplos omiten radicandos negativos e índice impar, omitiendo el caso en que se pueda dar que $-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Pasamos ahora a la “multiplicación de radicales del mismo índice” propiedad que es introducida del siguiente modo:

391 MULTIPLICACION DE RADICALES DEL MISMO INDICE

REGLA
Se multiplican los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales entre sí, colocando este último producto bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.

A continuación, expone una demostración de la propiedad:

Vamos a probar que $a \sqrt[n]{m} \times b \sqrt[n]{x} = ab \sqrt[n]{mx}$.

En efecto: $a \sqrt[n]{m} \times b \sqrt[n]{x} = am^{\frac{1}{n}} \times bx^{\frac{1}{n}} = abm^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}} = ab(mx)^{\frac{1}{n}} = ab \sqrt[n]{mx}$.

Tal demostración, (en realidad seudo - demostración) se apoya en un cambio de notación y en la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente probada sólo a lo más para exponentes enteros, por tanto se advierte un error lógico en la demostración y la omisión de los dominios de validez para los radicandos.

Luego sigue con la multiplicación de radicales de distinto índice, en que no presenta ninguna demostración, sólo la da de forma impuesta la regla a seguir en tales casos.

El tratamiento de la división, no la incluimos por tener un tratamiento similar:

394 DIVISION DE RADICALES DEL MISMO INDICE
REGLA
 Se dividen los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales entre sí, colocando este último cociente bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.

Primer muestra la regla y luego da la demostración respectiva:

Vamos a probar que $a\sqrt[n]{m} \div b\sqrt[n]{x} = \frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{m}{x}}$.

En efecto: El cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo:

$$\frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{m}{x}} \times b\sqrt[n]{x} = \frac{ab}{b} \sqrt[n]{\frac{mx}{x}} = a\sqrt[n]{m}$$

Esta demostración es diferente al resto y se basa en la relación inversa entre las operaciones de multiplicación y división. Se omiten las restricciones y más que una demostración, es en realidad una verificación de que debe funcionar así la división de radicales, de modo que se mantenga el hecho de que la multiplicación y división sean operaciones inversas.

También las mismas faltas de omisión y errores lógicos en la demostración, ocurren con la radicación de radicales, que comienza así:

V. RADICACION DE RADICALES

397 REGLA

Para extraer una raíz a un radical se multiplica el índice del radical por el índice de la raíz y se simplifica el resultado.

Vamos a probar que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

En efecto: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$.

Y se sigue una lista de ejemplos y ejercicios propuestos.

En conclusión desarrolla un tratamiento que dista del Saber erudito, pues las propiedades no las demuestra por medio de la definición de raíz cuadrada que da previamente, sino escribiendo primero los radicales como potencia y basándose en propiedades de éstas últimas, las que como se dijo antes, no se han demostrado en el texto para exponentes racionales no enteros.

- **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Como aplicaciones revisaremos tres temas en que se presentan los radicales como herramienta: La racionalización, las ecuaciones con radicales y la resolución de las ecuaciones cuadráticas.

La racionalización es tratada sólo para el denominador de una fracción, indicando que es un procedimiento que permite convertir un denominador irracional de una fracción, en otra equivalente con denominador racional. Se indica en qué consiste el concepto, pero no se explicita su necesidad. Por otra parte, permite advertir que lo irracional sigue estando anclado al uso de expresiones radicales con literales en las que no es posible hacer la extracción de raíz. Se corrobora esta inferencia con la frase “Cuando se racionaliza el denominador irracional de una fracción, desaparece todo signo radical del denominador”.

Los métodos de racionalización que trabaja son dos, según sea la forma de la expresión del denominador: $a\sqrt{b}$, $p\sqrt{a} + q\sqrt{b}$, sin restricciones otra vez.

Para las ecuaciones con radicales, expone la “Resolución de ecuaciones con radicales que se reducen a primer grado”. La exposición es la siguiente y como se verá no hace mención a la necesidad de comprobar la solución obtenida:

(2) Resolver la ecuación $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$.

Aislado un radical: $\sqrt{x+4} = 5 - \sqrt{x-1}$

Elevando al cuadrado: $(\sqrt{x+4})^2 = (5 - \sqrt{x-1})^2$
o sea $x + 4 = 5^2 - 2 \times 5 \sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)^2}$

Efectuando: $x + 4 = 25 - 10\sqrt{x-1} + x - 1$

Aislado el radical: $x + 4 - 25 - x + 1 = -10\sqrt{x-1}$

Reduciendo: $-20 = -10\sqrt{x-1}$
 $20 = 10\sqrt{x-1}$

Dividiendo por 10: $2 = \sqrt{x-1}$

Elevando al cuadrado: $4 = x - 1$
 $x = 5$. R.

Propone 26 ejercicios, luego da un ejemplo de cómo resolver ecuaciones con radicales en el denominador, y una nueva lista ahora con 10 ejercicios. En los ejemplos desarrollados, no aparecen situaciones en que la solución no satisfaga la ecuación ni da explicación alguna acerca del método (y de la irreversibilidad de la elevación al cuadrado a ambos lados de la igualdad) además de completa ausencia de la necesidad de comprobación de los candidatos a solución. Da a entender así, que el método siempre permite encontrar las soluciones, lo que no es cierto en general. El texto prosigue con un capítulo destinado a los números imaginarios, en que no utiliza ni la notación con pares ordenados ni el empleo de la unida imaginaria i , sino el símbolo $\sqrt{\quad}$ con cantidades subradicales negativas.

Si se observa este texto más adelante, específicamente en el capítulo destinado a las ecuaciones cuadráticas (p. 452 - 457), al momento de resolver $x^2 = 9$, hace $x = \pm\sqrt{9}$

de donde $x = \pm 3$. Comparando estas dos últimas igualdades, implícitamente el autor trabaja con $\sqrt{9} = 3$, que es correcto. Si hubiese sido coherente con su tratamiento, debería haber establecido que $x = \sqrt{9}$ conlleva a $x = \pm 3$.

Finalmente en esta misma sección, se encuentra el subtítulo “ecuaciones con radicales que se reducen a 2º grado. Soluciones extrañas”. Aquí sí pone énfasis en el reemplazo de los valores encontrados para la incógnita. Su justificación la expresa en los siguientes dos párrafos, la que se cita textualmente:

“Las ecuaciones con radicales se resuelven como sabemos, destruyendo los radicales mediante la elevación de los dos miembros a la potencia que indique el índice del radical.

Cuando la ecuación que resulta es de 2º grado, al resolverla obtendremos las dos raíces de la ecuación, pero es necesario hacer la verificación con ambas raíces de la ecuación dada, comprobar si ambas raíces satisfacen la ecuación dada, porque cuando los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia generalmente se introducen nuevas soluciones que no satisfacen la ecuación dada.

Estas soluciones se llaman soluciones extrañas o inadmisibles. Por lo tanto es necesario en cada caso hacer la verificación para aceptar las soluciones que satisfacen la ecuación dada y rechazar las soluciones extrañas. Al hacer la verificación, se debe tener en cuenta solamente el valor positivo del radical”. (p. 456 – 457).

Curiosamente, esta explicación se cita sólo para cuando la ecuación se reduce a una de 2º grado. Como se vio antes, una ecuación con radicales reductible a primer grado, no contemplaba ninguna advertencia sobre su solución y se aceptaba sin verificación alguna.

Por otra parte, no indica ni ejemplifica por qué se producen estas raíces extrañas, cuyo nombre además da una visión oscura o misteriosa de la razón de este hecho, referido a la falsedad del recíproco del teorema

$$(\forall a \in R)(\forall b \in R): a = b \Rightarrow a^n = b^n$$

o en especial,

$$(\forall a \in R)(\forall b \in R): a = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

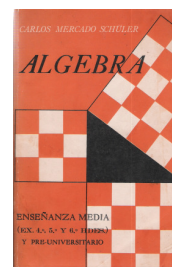
Tampoco se señala que estas ecuaciones son resueltas en el conjunto de los números reales.

Los 14 ejercicios propuestos, son ecuaciones con radicales que según el solucionario tienen 1 o 2 soluciones, por lo tanto no hay ejemplos en que se aprecien ecuaciones que no tienen solución en \mathbb{R} .

5.2.3.1 Aplicación de la Matriz MIGt para la caracterización del libro 3a.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

Esta obra se titula “Álgebra”, es un libro nacional que se comercializa en el mercado particular.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

El autor fue Miembro de la Real Academia de Farmacia de España; Miembro de la Academia de Ciencias Farmacéuticas de Chile; Miembro H. del Colegio Químico-Farmacéutico y Bioquímico de Chile; Miembro de la Junta Directiva de la Universidad de La Serena; Profesor de la Escuela Militar Bernardo O'Higgins; Profesor de la Facultad de Química y Farmacia U. de Chile; Profesor del Colegio Santa Úrsula; Ex Profesor de: Liceo de Aplicación; Liceo Federico Anisen; Escuela Superior de Correos y Telégrafos; Facultad de Filosofía y Educación U. de Chile; Instituto Luis Campino.

Según estos datos, se puede observar parte de la trayectoria que ha tenido el autor, hasta la fecha de dicha publicación, la cuál muestra una diversidad de ambientes educativos, la que le da un interés particular al tratamiento de los contenidos.

- **MIGt3: Edición y Tipo de Obra.**

Este libro pertenece a Editorial Universitaria S.A., una de las primeras empresas editoras que se ocupa de ofertar libros de texto para enseñanza básica y media. No se indica número de edición, pero sí está fechada su inscripción en 1968. En su prólogo se puede indicar que está de acuerdo al Programa de Estudios del año 1968 para la Enseñanza Media (Ex. 3º, 4º, 5º y 6º años de humanidades), cuyos contenidos son para todo este ciclo y no para un curso determinado, por lo que el tipo de obra es la de un compendio de temas tratados en la enseñanza secundaria. Al respecto, el texto también en su prólogo muestra ser una fuente de apoyo, cuyos propósitos se enmarcan hacia la preparación de la prueba específica de matemáticas en el ingreso a la Universidad.

- **MIGt4: Presentación física.**

El libro se compone de un total de 493 páginas en papel roneo con una tipografía muy similar a la antigua máquina de escribir, en color negro. El tamaño de sus páginas es de 14,4 cm por 22,4 cm.

5.2.3.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 3a.

Este libro de texto comprende idéntico tratamiento que la obra seis en cuanto a los campos MACt3, MACt4, MACt5 y MACt6, ya que se trata del mismo autor y la misma editorial que lanzan una nueva versión de este libro de texto también en formato de compendio con temas generales de enseñanza media, con algunas variaciones en la organización general de los contenidos pero, insistimos, con el mismo discurso escrito al interior de cada temática, en especial los vinculados a los que conciernen los conceptos de raíz y de radical.

Por este motivo y para evitar la repetición, he escogido completar sólo los dos primeros campos de la matriz MACt para este dispositivo, por entregar información

distinta a la del texto 5a, y en el caso de éste último, se realizará su descripción completa, decisión que se ha tomado fundamentalmente por encontrarse con mayor disponibilidad en el mercado particular, con un mayor número de ejemplares que lo hacen incluso más conocido, lo que se infiere al observar los resultados de búsqueda en catálogos de bibliotecas universitarias como también con mayor presencia en tiendas de libros antiguos.

- **MACT1: Organización de los contenidos.**

Su propuesta la organiza en 27 capítulos. El siguiente cuadro muestra los contenidos centrales de cada capítulo.

Tabla 5.5. Organización temática del texto 3a

Capítulo	Nombre	Descripción
I	Expresión algebraica.	Estudia los conceptos de término algebraico, valor absoluto, adición y sustracción algebraica, uso de paréntesis.
II	La Multiplicación	Estudia la regla de los signos, la multiplicación y división de potencias, multiplicación de monomios y de polinomios, los productos notables y factorización.
III	La División	Estudia la división por un monomio, por un polinomio, la divisibilidad numérica, fracciones, mcm y mcd.
IV	Ecuaciones	Estudia la resolución de ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros, fraccionarios y literales, además de ocuparse de la relación entre el cero y el infinito (el caso de la división entre cero).
V	Razones y Proporciones	Estudia los conceptos de razón y proporción para derivar en el cálculo de la cuarta, la tercera y la media proporcional. También se ocupa de tratar series de proporciones.
VI	Problemas por plantear	Estudia el lenguaje algebraico y la resolución de problemas verbales.
VII	Potenciación	Estudia las potencias de exponente entero, y la división de polinomios por medio del teorema del factor.
VIII	Ecuaciones exponenciales	Estudia la resolución de ecuaciones exponenciales reducibles a ecuaciones de primer grado.
IX	Radicación	Estudia la extracción de raíz como operación inversa a la potenciación, su relación con las potencias de exponente fraccionario, el álgebra de radicales, el algoritmos para extraer raíz cuadrada aritmética, los números irracionales, racionalización y

		una introducción a los números complejos.
X	Ecuaciones de segundo grado	Estudia la resolución de ecuaciones cuadráticas, bicuadráticas, las propiedades de las raíces y la gráfica de la función ² de segundo grado.
XI	Ecuaciones irracionales	Estudia la resolución de ecuaciones irracionales que se reducen a ecuaciones de primer o segundo grado.
XII	Discusión de las raíces de la ecuación de segundo grado	Estudia la naturaleza real o compleja de las raíces de la ecuación cuadrática.
XIII	Logaritmos	Estudia el concepto y las propiedades de los logaritmos, el uso de tablas, la función exponencial y la logarítmica y las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
XIV	Sistema numérico	Estudia el sistema numérico de los números complejos, con énfasis en su gráfica.
XV	Resumen de conocimientos de geometría	Abarca el concepto de área de polígonos y algunos teoremas de la geometría de proporciones, entre los que destacan el teorema de Euclides y el de Pitágoras.
XVI	Sistema de coordenadas	Estudia el concepto de función, de proporcionalidad directa e inversa, la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales y las funciones cuadráticas.
XVII	Sistemas de ecuaciones	Estudia ampliamente los sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticos con dos y tres incógnitas.
XVIII	Desigualdades e inecuaciones	Estudia las desigualdades y sus propiedades, las inecuaciones de primer grado, sistemas de inecuaciones de primer grado con un a y dos incógnitas.
XIX	Nociones de trigonometría	Estudia la trigonometría en el triángulo rectángulo, ampliándose a triángulos oblicuángulos para tratar el teorema del seno y el del coseno, identidades y ecuaciones y la medición de ángulos con radianes.
XX	Cálculo vectorial	Estudia las operaciones con vectores.
XXI	Determinantes	Estudia el cálculo de determinantes y sus aplicaciones a los sistemas de ecuaciones.
XXII	Progresión aritmética	Estudia los conceptos, propiedades y problemas referidos a progresiones aritméticas, geométricas y armónicas.
XXIII	Sumatoria	Estudia el cálculo de sumatoria por medio de sus propiedades fundamentales.
XXIV	Análisis combinatorio	Estudia el conteo en permutaciones, combinaciones, y arreglos.
XV	Cálculo de probabilidades	Estudia el cálculo de probabilidades por medio de la regla de Laplace, los sucesos simples y compuestos y algunas propiedades.
XVI	Teorema del binomio de Newton	Estudia la generalización de potencias de binomios para exponentes naturales.
XVII	Teoría de errores	Estudia los conceptos de error absoluto y error relativo.
Tablas		De cuadrados, cubos, raíces, logarítmicas, trigonométricas.

² Esto es lo que realmente hace, pues en su índice aparece bajo el nombre de “gráfica de la ecuación de segundo grado”, lo que sabemos, es un error conceptual, pues de ser sólo la gráfica, se tendría como gráfica, dos puntos, uno o ninguno de la recta real.

En esta organización se puede ver que los radicales aparecen tratados en el capítulo IX, y también como herramienta en los capítulos X y XI en el contexto algebraico, y en otros aparecen en un contexto geométrico o aritmético del que no nos ocupamos en esta investigación. Como se ha mencionado ya, estos capítulos que se repiten en la obra seis, serán descritos y analizados cuando se presente tal libro.

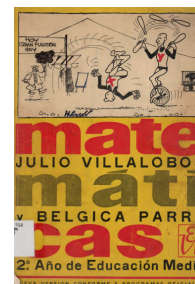
- **MACT2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

El texto presenta los contenidos partiendo de la definición en la mayoría de los casos, pasando luego a ejemplos y dando una serie de ejercicios para la práctica. Se ajusta así a la categoría de presentación Axiomática, mientras que en relación a las actividades propuestas, que corresponden a listados de ejercicios para automatizar técnicas, queda perfectamente clasificado como Mecanicista. Así se le asigna a esta obra en este campo, el par (A, M).

5.2.4.1 Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 4a.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El libro de texto se titula “Matemáticas 2º año de Educación Media”. Es un texto nacional comercializado en el mercado particular.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

El equipo de autoría lo conforman dos personas:

- Autor 1: Profesora de Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas en el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile y Profesora de Matemáticas de la Escuela de Medicina Veterinaria del mismo plantel.

- Autor 2: Profesor de Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas en el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile y Profesor de Matemáticas en la Escuela de Agronomía en la misma universidad.

• **MIGt3: Edición y Tipo de Obra.**

Este dispositivo es un libro de texto para el nivel de 2° año de educación media como se aprecia en su nombre. Pertenece a la Editorial Universitaria S. A., una de las empresas editoras pioneras en libros de texto hechos en Chile. Por aquella época una de las más grandes. La edición es la número 5 fechada en 1970. Su primera edición data de 1966, pero hemos seleccionado esta versión que viene conforme a los programas oficiales impulsados por la reforma de 1965. Es impreso en Chile por las prensas de la misma editorial y corresponde a la serie “textos escolares modernos”.

• **MIGt4: Presentación física.**

Contiene 138 páginas blancas con impresión a dos colores: Negro y rojo. Su tamaño es de 19 cm por 26 cm.

5.2.4.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 4a.

• **MACt1: Organización de los contenidos.**

Su propuesta la organiza en cinco capítulos y un apéndice. El siguiente cuadro muestra los contenidos centrales de cada capítulo.

Tabla 5.6. Organización temática del texto 4a

Capítulo	Nombre	Descripción
I	Nuevos Números	Desarrolla 10 temáticas relacionadas con la estructura de cuerpo del conjunto de los números complejos, su relación con el conjunto de los números reales y su representación gráfica.
II	Álgebra de los	Desarrolla 18 temáticas partiendo por la densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{Q} , el principio de las cortaduras

	números reales	de Dedekind, el concepto general de cuerpo y cuerpo ordenado sobre un conjunto K y el axioma del supremo, para derivar en el álgebra en \mathbb{R} , desde las potencias de exponente natural a las de exponente racional, la radicación, el concepto de raíz cuadrada de un número complejo y la logaritmicación.
III	Funciones y Ecuaciones	Presenta 9 temáticas que se inician desde el concepto de función, sus representaciones, algunos de sus tipos (exponencial, y cuadrática) para comprender el concepto de inversa de una función. Luego desarrolla la resolución de ecuaciones de segundo grado, las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática, las ecuaciones que llama irracionales y finalmente entre en los sistemas de ecuaciones de segundo grado y en las inecuaciones cuadráticas con una incógnita.
IV	Los Vectores	Revisa en 17 títulos el concepto de vector en el plano, las operaciones con estos objetos matemáticos, su estructura de grupo conmutativo para la adición, el concepto de espacio vectorial, y vectores en 3 dimensiones.
V	Geometría Afín del plano	Trabaja en 13 temas los elementos de la geometría desde un punto de vista vectorial con lo que llama vectores y trazos dirigidos, siendo esto contenido base para estudiar la geometría de proporciones (teorema de Tales, haces armónicos, Teorema de Menelao y la versión vectorial de la ecuación de la recta en el plano).
Apéndice		Incorpora 3 temas: <ol style="list-style-type: none"> 1. El cuerpo C no es ordenado. 2. Conservación del bicuociente. 3. Teorema de Ceva. Además de incluir tablas de cuadrados y cubos hasta el 100, de raíces cuadradas, valores para imágenes de funciones trigonométricas y logaritmos con 4 decimales.

Como se puede ver, los radicales están insertos como objeto de estudio en el capítulo II: “Álgebra de los números reales” que contiene 34 páginas de las cuales 10 aproximadamente son del tratamiento del álgebra radical, con algunas otras páginas de los capítulos I y III en que se utilizan como herramienta.

• **MACT2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

Los contenidos los trata en algunos casos partiendo por las definiciones, sembrando el modelo axiomático puro. En otras ocasiones, parte de preguntas para levantar una pequeña reflexión, pero luego da todo resuelto lo que resulta algo impuesto y da pie para pensar que no hay otro abordaje de la interrogante. Por tanto, se asimila con mayor nitidez a la estructura axiomática.

En cuanto al tipo de actividades, la gran mayoría son ejercicios de rutina, por lo que clasifica en la categoría de mecanicista. Asignamos entonces el par (A, M) a este texto.

• **MACt3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Los radicales son objeto de estudio en el capítulo II “Álgebra de los números reales” donde la organización en que se encuentran los radicales en el ambiente algebraico, está dado por la siguiente secuenciación:

- 1) Densidad de los racionales.
- 2) Ejemplo de un “hueco” en el conjunto Q .
- 3) Principio de las cortaduras de Dedekind.
- 4) Conjunto Universo.
- 5) Estructura de cuerpo sobre un conjunto K cualquiera.
- 6) Relaciones.
- 7) Cuerpo ordenado.
- 8) Relaciones de orden en un cuerpo ordenado.
- 9) Supremo e ínfimo de subconjuntos acotados.
- 10) El axioma del supremo y principio de las cortaduras de Dedekind.
- 11) Algebra en R .
- 12) Potenciación.
- 13) Valores de las potencias de base entera.
- 14) Potencias cuyo exponente no es un número natural.
- 15) Radicación.
- 16) Propiedades de las raíces.
- 17) Raíz cuadrada de un complejo.
- 18) Logaritmación.

La secuencia de los títulos sugieren algo que se confirma al revisar el libro de texto: Hay un tratamiento muy formal hasta en los diez primeros temas, para luego

entrar a un terreno que desarrolla de modo más instrumental. Con las cortaduras de Dedekind o bien por el axioma del supremo, queda establecida la existencia y unicidad del radical n -ésimo, como hemos visto en el estatus erudito del final del capítulo 2. Hay bastante material de análisis, pues tomando como base el desarrollo formal de las diez primeras temáticas, se puede observar qué sucede con las restantes, colocando mucho detalle en la penúltima, donde se establece una relación con los números complejos y por tanto permite saber cómo se está utilizando por un lado el concepto de raíz, y por otra el empleo del signo radical.

• **MACT4: Presentación de los radicales.**

Los radicales aparecen en tres capítulos esencialmente. Veamos esto por parte. En el capítulo I, se utiliza con dos fines; uno para mostrar la necesidad de ampliar el ámbito numérico de \mathbb{R} a \mathbb{C} , indicando que “hallar un número que sea la raíz cuadrada de una cantidad negativa” es imposible en \mathbb{R} , y por otra parte como herramienta en el estudio de los números complejos para denotar módulos de complejos y números imaginarios, por medio del empleo de radicales cuadráticos con radicandos negativos.

En el capítulo III, aparece un breve desarrollo de la función $y = \sqrt{x}$, como también el empleo de radicales en la resolución de ecuaciones cuadráticas y las llamadas por el autor, “irracionales”.

Tanto las descripciones que hemos dado hasta aquí, a modo de sinopsis, respecto del uso de radicales en estos dos capítulos, serán tratados en detalle en el campo MACT6.

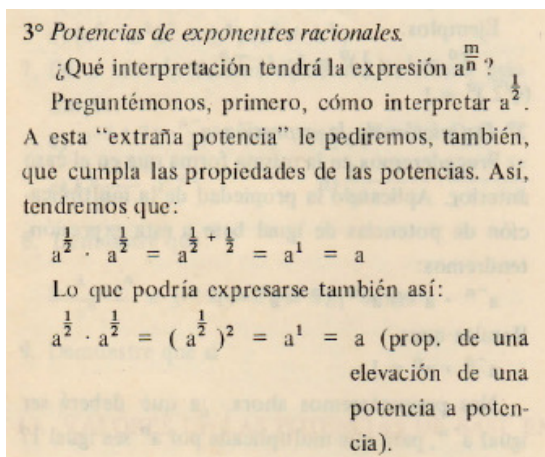
Centrándonos en la presentación “institucionalizada” de los radicales, nos situamos en el capítulo II en que se estudia el álgebra en \mathbb{R} . Se observa una discontinuidad en la secuencia propuesta, ya que interviene inicialmente el objeto radical para dar respuesta a la interrogante “¿Qué interpretación tendrá la expresión $a^{\frac{m}{n}}$?”, que se

sitúa bajo el desarrollo del tema 14: “Potencias cuyo exponente no es un número natural”. La respuesta la construye en función de algo ya conocido, pues indica que ha sido estudiada el año anterior, con la salvedad que debemos dejar claro que como quinta operación de la aritmética, (según los programas oficiales) y por tanto, no corresponde a esta investigación detenerse en aquello.

La ruptura a la que hacemos alusión, está en el sentido que luego en dos planas más adelante, separadas por ejercicios de potencias (de exponente racional) y por cálculo numérico de éstas en aplicaciones como la notación científica, viene luego el título 15 “Radicación”, el que retoma éste concepto como una de las inversas operaciones de la potenciación. La discontinuidad es clara, se ponen en acción teoremas en acto para mostrar que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, que no se han demostrado más que para potencias de exponente entero, como se puede evidenciar en páginas previas del libro de texto.

Podemos resumir entonces que hay dos presentaciones de los radicales: Como potencia de exponente fraccionario y como una operación inversa de la potenciación. Interesante es detectar aquí cómo se articulan estas dos formalizaciones. Para ello, entramos en detalle en cada una, mostrando las evidencias que hasta aquí hemos descrito.

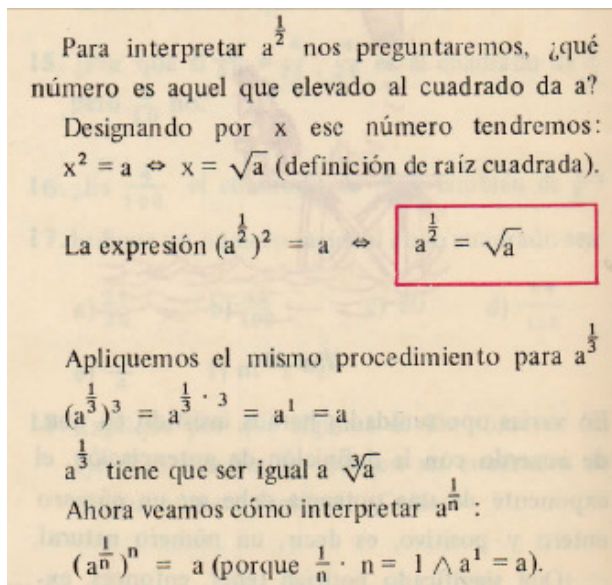
Detalle de la primera presentación. La examinaremos por parte:



En rigor, el título debiera indicar que se trata de exponentes racionales no enteros, puesto que hablar de racionales sin esta distinción contradice la génesis de \mathbb{Q} como superconjunto de \mathbb{Z} .

Toma la vía de la suposición de que se cumplen las mismas propiedades de las potencias de exponente entero, para las de exponente fraccionario³, pero no da ninguna restricción sobre el tipo de números que representan los literales empleados.

Continuemos con su desarrollo:



En este recuadro se puede ver que al entrar en escena el radical cuadrado, lo hace en un ambiente aritmético, puesto que sólo en el caso que x y a representen números positivos, se tendrá en efecto que $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$, lo que no es verdadero en el caso algebraico:

$$x^2 = a \Leftrightarrow (x = \sqrt{a}) \vee (x = -\sqrt{a})$$

que proviene de la propiedad de números reales:

$$(\forall a \in R)(\forall b \in R): a = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

que es una condición necesaria pero no suficiente, y que conduce a establecer entonces que:

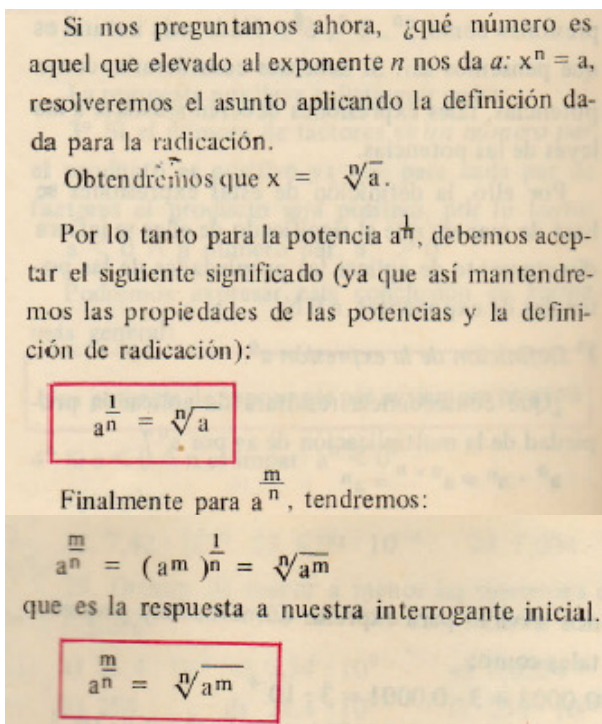
$$(\forall a \in R)(\forall b \in R): a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b).$$

Esta presentación es correcta entonces en el ambiente aritmético, pero si está en el capítulo de Álgebra en R , puede con alta probabilidad, ser fuente de múltiples errores originados por omisión de información y de un tratamiento más cuidadoso al emplear letras sin hábitat, mostrando generalizaciones que así como se muestran parece ser que

³ Aunque no lo hemos señalado antes, utilizamos el concepto de “fraccionario” en el sentido número fraccionario, esto es como notación de un cociente indicado, en que el numerador no es divisible por el denominador.

se cumpliera para cualquier número real, que por cierto es el conjunto de referencia de esta unidad. Hasta esta parte, podría por ejemplo llegarse al error que $(a^b)^c = (a^c)^b$ para cualquier real a y cualquier racional representado por b y c .

Continuemos con el texto descrito:



Corroborando lo que hemos señalado, la pregunta que hace en esta parte da origen a una respuesta que sería válida sólo en los reales no negativos, pues en \mathbb{R} sólo se obtendría $x = \sqrt[n]{a}$ sólo si n es impar, y sería $x = \sqrt[n]{a} \vee x = -\sqrt[n]{a}$ si n es par. Nada de esto se indica al respecto. La ambigüedad que muestra radica entonces en no establecer donde se resuelve la ecuación $x^n = a$, como también qué tipo de números representan los literales involucrados. Insisto que el título del capítulo “Álgebra de los

números reales”, no es “Álgebra de los números reales positivos”, pues se sigue manifestando el contexto aritmético y no se desarrolla el algebraico en esta sección. Y, si esta fuera una opción metodológica, tampoco se hace referencia a ella. Cabe señalar que no hay referencia específica al caso $\sqrt[n]{0}$ y qué no puede ser $0^{\frac{1}{n}}$.

Se llega de este modo a la formalización del concepto de potencia de exponente racional, que insistimos también, debiera agregar, no entero.

Definición: Una potencia cuyo exponente es un número de la forma $\frac{m}{n}$ (número racional) equivale a la raíz de índice n , de la base elevada a m .

Un par de comentarios sobre esta definición:

1. Cuando caracteriza al racional por la expresión $\frac{m}{n}$ como racional, no señala que para tal efecto m y n deben ser enteros con $n \neq 0$. Un gran problema de divulgación en la matemática escolar, es la errónea identificación de toda expresión de la forma $\frac{m}{n}$ como racional⁴, la que puede ser irracional por ejemplo si $m = \sqrt{2}$ y $n = 3$, expresión que sufre de la misma asignación de significado equívoco que las expresiones que usan $\sqrt{\quad}$ para indicar “irracionalidad”.
2. Introduce el concepto de potencia de exponente racional, en base al concepto de raíz de índice n que ya debieran conocer los estudiantes.

Cabe indicar, que observando la sección de ejercicios que sigue, no ofrece problematización alguna que permita dilucidar restricciones para lo tratado aquí. Los ejercicios numéricos se ajustan a las restricciones, por lo que la elección de estos es intencionada a la mecanización, peligrosa decisión para el ambiente algebraico.

Vamos al detalle de la segunda presentación que se sitúa en dos planas más adelante y que comienza con el próximo título “radicación”:

En este punto, conceptualiza la radicación como una de las dos operaciones inversas de la potenciación, siendo la otra la logaritmación, fundamentando que la potenciación dispone de dos inversas puesto que $a^n \neq n^a$, y en el caso que se pida hallar la base o se pida el exponente conocido el valor de la potencia, se tendrá una u otra de

⁴ Algunos podrán sostener al respecto que siempre que se utilizan las letras m y n se subentiende que representan enteros, así como x, y, z se ha dejado (como lo hacia Descartes) para indicar incógnitas. El problema es que en álgebra deben ser explicitados los acuerdos, previniendo que no todos los autores se guían con ellos. Creemos que es importante que el uso de las letras siempre aparezca con sentido para los estudiantes, y que se muestren o aprovechen de problematizar por el docente o en los libros de texto, las restricciones en su uso.

las operaciones nombradas respectivamente. A partir de ahí, y quedándose con la radicación, presenta los términos que componen una expresión radical, que los autores llaman raíz, como se evidencia en el siguiente párrafo extraído de la página 41:

El símbolo $\sqrt{\quad}$ es llamado raíz. La expresión que queda bajo la raíz, *cantidad subradical* o *radicando* y n , índice de la raíz.

Como se ve, al signo radical le llama raíz, lo que coincide con su génesis, pero que debe distinguirse, de no emplear el concepto de radical, de la noción de raíz en la teoría de ecuaciones, que como ya se ha dicho, causa confusión. Sin embargo, incorpora el concepto de cantidad subradical o radicando.

Define luego la raíz enésima de un número real como sigue:

Definición de raíz n "ésima" de un número real: Sea $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces se llama "raíz n de x " a todo número $y \in \mathbb{R}$ tal que: $y^n = x$
 $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$

Esta definición no se corresponde con la del Saber erudito. Su ruptura está en la utilización errónea de $\sqrt[n]{x}$ para indicar al conjunto de todas las raíces enésimas de un número real x . Matemáticamente la expresión $\sqrt[n]{x}$, definida para $x \geq 0$, indica aquel único número también positivo cuya n -ésima potencia es x . Estamos así frente a un enorme error conceptual.

El error llega a ser tal, que siguiendo con la lectura, se recuerda la relación entre la notación radical y la de potencia con exponente fraccionario, la que le permite escribir $\sqrt[n]{a^n} = a$, sin restricción alguna, lo que es otro error conceptual.

Para rematar este hecho, en la página 42, desarrolla unas líneas bajo el subtítulo “valores de una raíz”, que puede dejar perplejo a cualquier conocedor de la teoría matemática, en cuanto a la aberración que cito a continuación, para efectos de la transposición equivocada que se divulga en este texto:

Poco más arriba dijimos que $\sqrt{4} = 2$; porque $2^2 = 4$; pero la cosa no es tan simple. Vea: $(-2)^2 = 4$. Nos encontramos entonces con la siguiente situación.
 $\sqrt{4} = 2$ ó $\sqrt{4} = -2$

El radical lo utilizan para el conjunto de las raíces cuadradas de 4, fiel a su definición, pero en clara mutilación del Saber matemático. Pero no se queda allí, pues lo que sigue es peor aún, pues muestra un fundamento que es correcto en su cuerpo pero es mal interpretado, lo que lleva a la definición errónea que ofrece:

Si $(a + b)(a - b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \Rightarrow a = -b \\ a - b = 0 \Rightarrow a = b \end{cases}$

Por lo tanto:

$$a^2 = b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = b \end{cases}$$

Si n es cualquier otro número par, $n = 2k$, tendremos que: $a^n = b^n$ se expresa así: $a^{2k} = b^{2k}$ de donde $a^{2k} - b^{2k} = 0$, expresión equivalente: $(a^k)^2 - (b^k)^2 = 0$, propiedad de las potencias:

$$(a^k + b^k) \cdot (a^k - b^k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^k = -b^k \\ a^k = b^k \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$a^{2k} = b^{2k} \Rightarrow \begin{cases} a^k = -b^k \\ a^k = b^k \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$16 = 2^4 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(2)^4} = 2 \\ \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(-2)^4} = -2 \end{cases}$$

Lo que aquí presenta es correcto para cualquier pareja de números reales a y b , sin embargo, pasar del “Por lo tanto” al “Por ejemplo” que están al final del cuadro extraído, conlleva el problema de interpretación por parte de los autores del texto, puesto que lo que se tiene en términos matemáticos es que:

16 tiene dos raíces cuartas, es decir, dos números cuyas cuartas potencias dan 16, es decir:

$$x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2^2)(x^2 - 2^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x = \sqrt{2^2} \vee x = -\sqrt{2^2})$$

de donde $x = 2 \vee x = -2$. Además, vemos que en la última línea escribe:

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(-2)^4} = -2, \text{ lo que es contradictorio al teorema que en efecto indica que}$$

$(\forall a \in \mathbb{R}): \sqrt[n]{a^n} = |a|$, o bien, específicamente, $\sqrt[n]{x} \geq 0$, por el recorrido de la función radical de orden cuatro.

El texto prosigue ocupándose de los radicandos negativos, y luego de aquello, da un resumen en el que nuevamente entra en contradicción, pero ahora con respecto a lo dicho por los mismos autores. Señalan que para la expresión $a^n = p$, siendo n un entero positivo:

1° Si $p > 0$, existe un solo número positivo $a \in \mathbb{R}$, tal que $a = \sqrt[n]{p}$ y se llama *raíz principal*, de p .
 2° Si $p > 0$, y n es par, existe además otra raíz secundaria que es igual al aditivo inverso de a y corresponde al número real $-\sqrt[n]{p}$.

En este resumen se expone de forma absolutamente correcta tanto el concepto de raíz de un número real como el uso del signo radical, sin embargo, no se condice con el discurso desarrollado. Luego de este resumen, viene un conjunto de actividades, entre las que destacamos la siguiente, que extraemos como evidencia de la ruptura epistemológica entre el Saber escolar y el Saber erudito, que a pesar de contar con una corrección en el resumen expuesto, no es considerado para efectos de la práctica:

Calcule:	Indique la raíz principal y la secundaria, si las hay, de las siguientes cantidades:		
1. $\sqrt[3]{2}$ con dos decimales	16. $\sqrt{9}$	19. $\sqrt{-49}$	22. $\sqrt[5]{10000}$
2. $\sqrt{24}$ con tres decimales	17. $\sqrt[3]{-1}$	20. $\sqrt[3]{0,216}$	23. $\sqrt[6]{64}$
3. $\sqrt[4]{18}$ con un decimal	18. $\sqrt[4]{16}$	21. $\sqrt{0,36}$	24. $\sqrt{\frac{75}{3}}$
4. $\sqrt[3]{128}$ con un decimal			

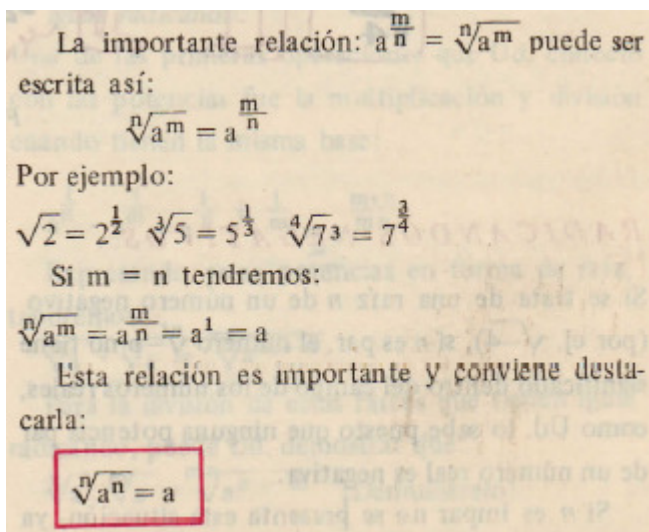
En este extracto se da una situación al menos curiosa. En los ejercicios de la izquierda, donde se pide calcular con cierta longitud de desarrollo decimal, al revisar el

solucionario, para el caso de $\sqrt{18}$ se da sólo el valor de 2,0 lo que es correcto. En el ítem de la derecha, en cambio, se pide la raíz principal y la secundaria por ejemplo de $\sqrt{0,36}$ apareciendo en el solucionario los números 0,6 para la raíz principal y $-0,6$ para la secundaria, lo que constituye el grave error pues se ha interpretado que $\sqrt{0,36} = 0,6 \vee \sqrt{0,36} = -0,6$ como ya se había visto en el texto, lo que – insistimos – no tiene relación alguna con el resumen que siendo correcto, aflora como algo escrito sin ser utilizado.

• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

Las propiedades de los radicales que se presentan en el texto, son demostradas o bien en otros casos se deja la demostración al lector, haciendo uso de la notación de potencia, por tanto, se dan demostraciones con errores lógicos.

Las propiedades se secuencian en el siguiente orden.



No utiliza restricción alguna y la pseudo – demostración está basada en el cambio de notación a potencia de exponente fraccionario, sin emplear la definición de radical (más bien de raíz según el autor) que por cierto se construye en este mismo apartado, lo que constituye una secuenciación diferente pues la propiedad nace antes de la institucionalización del objeto radical. La única formalización que permite dar cuenta de esta propiedad, es el cambio notacional, lo que con los supuestos del cumplimiento de las propiedades de las potencias ampliado a exponentes fraccionarios, conduce a la

justificación que se muestra en el recuadro. Aún así, la propiedad es sólo cierta para $a \geq 0$, lo que no está explicitado.

En la página 43 aparece el título 16: “Propiedades de las raíces”. La primera propiedad que enuncia es justamente la que ya describimos, por tanto aparece en dos lugares, con la misma justificación. Agrega, en todo caso, que esta propiedad hace ver que la radicación y la potenciación son operaciones inversas, pero sigue sin especificar los campos de validez.

La segunda propiedad la llama “Multiplicación y división de raíces que tienen igual radicando”, cuya seudo – demostración es:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{mn}}$$
 Expresando estas potencias en forma de raíz, tendremos:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$
 Para la división de estas raíces que tienen igual radicando, puede Ud. demostrar que:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$
 ¡Demuéstrelo!

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = ?$$
 Escribámosla como potencia de exponente fraccionario:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{m}}$$
 ¿qué propiedad aplicaría Ud.?
 Efectivamente: $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{nm}}$
 Volviendo a la forma de raíz tendremos:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{ab}$$
 En forma análoga, demuestre que:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a : b}$$
 lo que también, escribimos así:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Nuevamente se comprueba la ausencia de restricciones para los literales involucrados y el cambio notacional de los radicales como potencias para justificar el proceso.

Se muestra con algunos ejemplos numéricos luego, que para multiplicar o dividir radicales con iguales radicandos y distintos índices, se transforman los radicales a la notación de potencia y se emplean las propiedades de potencias.

Enuncia una tercera propiedad como “Multiplicación y división de raíces de igual índice”:

Nuevamente se observa que no hay restricciones para los literales involucrados y mecánicamente justifica

la propiedad en base a potencias, siguiendo con el error lógico de la demostración.

Luego da al lector la tarea de demostrar la parte correspondiente a la división. Inmediatamente nace la inquietud de pensar qué es lo que se supone que desean los autores que entiendan los lectores o cómo el docente que se orienta con este texto debe hacer su trabajo. La respuesta es obvia. Una mecanización de un proceso no sólo erróneo sino además, que lleva a generalizaciones a todo \mathbb{R} , como el caso en que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, siempre que a y b sean no negativos y que además el producto de la izquierda es no negativo por ser los factores de la misma naturaleza, y a la derecha el radical cuadrático también asume valores no negativos debidos al recorrido de la función radical de orden 2.

Como cuarta propiedad desarrolla la “Raíz de un producto y raíz de un cociente”, en el que se rescata la explicitación de la propiedad simétrica de la igualdad que permite leer en sentido inverso o bien reescribir las dos propiedades anteriores como sigue en el texto:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ Raíz de un producto

Análogamente, de la relación:

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ Raíz de un cociente.

Se entiende entonces que es la misma propiedad que la enunciada como tercera, por lo que no presenta demostración. Además, tampoco enuncia restricciones.

Aplica estas propiedades para descomponer radicandos en producto y proceder a la extracción de raíz de alguno de sus factores o del numerador o denominador según corresponda, dando a una expresión radical la forma $a\sqrt{b}$.

Una única observación que se da en el texto es la consideración para estas aplicaciones de las raíces principales. De este modo, evita dar dos soluciones a los ejercicios propuestos, seleccionando sólo los resultados de naturaleza no negativa.

Continúa con la racionalización, (tema que abordamos en el campo MACt6) y luego presenta “Otras transformaciones útiles de las expresiones irracionales⁵” en las que incluye:

- a) Simplificación de una raíz.
- b) Amplificación de una raíz.
- c) Raíz de una raíz.
- d) Cómo “introducir” un factor dentro de una raíz.
- e) Escribir con una sola raíz.

Para todas estas propiedades denominadas como “otras transformaciones”, se da al lector la tarea de realizar las demostraciones en base a potencias y en ninguna se utilizan restricciones. El trabajo por tanto es netamente instrumental y en algunos casos se citan ejemplos que resultan correctos por estar dentro del campo de validez de las propiedades.

En resumen, las propiedades son todas tratadas de igual modo y en cada una se corre el riesgo de la generalización indebida por parte del lector, por la omisión de información en las institucionalizaciones existentes, que son incompletas.

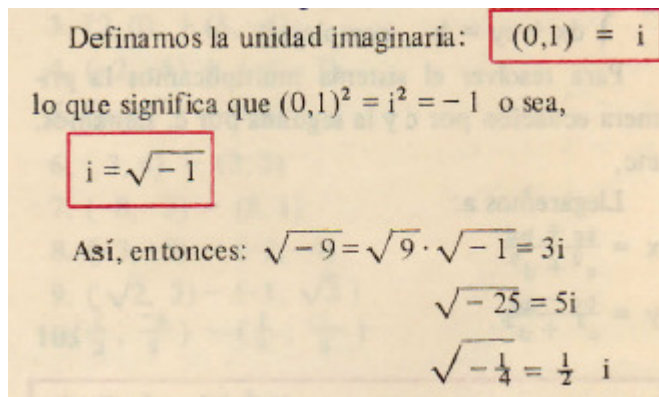
<ul style="list-style-type: none">• MACt6: Aplicaciones del álgebra de radicales.
--

De acuerdo al orden en que se desarrollan las temáticas en el libro de texto, las aplicaciones de los radicales como herramienta son las siguientes:

⁵ Este es un subtítulo textual del libro y desarrollado en la página 48. Este subtítulo deja entrever que el apodo irracional lo están utilizando para las expresiones que se escriben con el signo radical.

1. Notación de números imaginarios.

En el capítulo 1 que estudia la ampliación de \mathbb{R} a \mathbb{C} , el primer radical usado en el libro de texto es $\sqrt{-9}$, con la intención de señalar un número no real y por tanto que requiere de la construcción de un significado para dar solución a la extracción de raíz cuadrada según

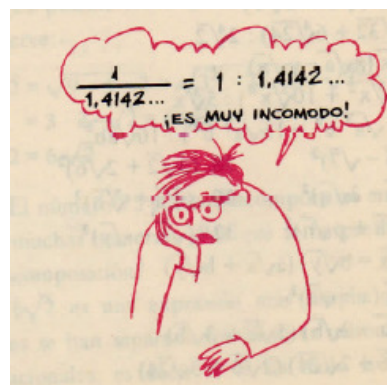


los autores. A pesar que usa los pares ordenados para representar números complejos, también emplea la forma binomial $a+bi$ y particularmente en el tratamiento de los imaginarios puros.

También se utiliza el signo radical en la representación y cálculo del módulo de un número complejo, sin trascender el error del “doble signo” por tratarse de una magnitud.

2. Racionalización.

Trabaja sólo la racionalización de denominadores, sin dar justificación al comienzo que permita comprender por qué es necesario estudiarla, pero aparecería más adelante, sugerida sólo por la imagen de la derecha, lo que muestra que los autores conciben la racionalización del denominador para efectos de cálculo numérico.



Es en este tema donde llama “irracional” a las expresiones que contienen el signo radical, lo que constituye otro error conceptual causado por una generalización

inadecuada. En el mismo texto, en páginas anteriores a presentar la racionalización, aparece en el siguiente análisis:

Si $p \in \mathbb{Q} \wedge p = a^n \Rightarrow \sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}$
 Por ejemplo:
 $\sqrt{\frac{9}{25}} \in \mathbb{Q}$ porque: $\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$
 $\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$
 ¿Por qué $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \in \mathbb{Q}$? ¿Por qué $\sqrt{\frac{1}{8}} \notin \mathbb{Q}$?

Y en la entrada a la racionalización, se tiene éste desarrollo:

5º Racionalización del denominador o de una expresión que contiene irracionales

Si nos encontramos con expresiones como las siguientes:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt[3]{a}}; \frac{1}{\sqrt[n]{a}}; \frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}; \frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}}; \dots$$

¿podremos transformarlas en otras expresiones equivalentes cuyo denominador sea racional?

Veamos algunos casos:

El multiplicativo inverso de \sqrt{a} es $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ($a \neq 0$).

¿Cómo encontrar una expresión equivalente a $\frac{1}{\sqrt{a}}$ y cuyo denominador no sea un irracional?

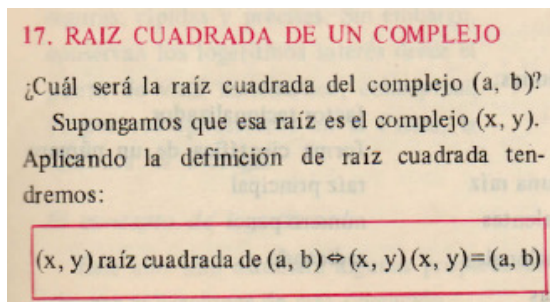
Comparando estos dos cuadros, vemos que en el primero, hay números que se denotan con el signo radical que pueden ser racionales o irracionales, mientras en el segundo hay una generalización de llamar irracionales a todas las expresiones que contienen radicales. Aunque es cierto que no hay otra forma exacta de escribir por ejemplo el irracional $\sqrt{2}$, frente a una fracción de los tipos que se muestran en el cuadro 2, habrá primero que analizar si lo que aparece como denominador es o no un irracional,

pues en $\frac{1}{\sqrt{9}}$, se puede apelar a la identificación del 3 escrito con notación radical que no requiere el proceso de racionalización, o por último, problematizar este tipo de situaciones, en que si bien se puede efectuar la racionalización al denominador de $\frac{1}{\sqrt{9}}$, no estaría acorde con el concepto, puesto que racionalizar indica en este caso el acto de “transformar el denominador en racional”, naturaleza que ya la tiene. Creemos que no es menor este hecho, pensando que la matemática debe aparecer como un Saber para el ciudadano común que en su etapa escolar le haya servido para desarrollar su pensamiento crítico, analítico y sintético; y no como el conjunto de reglas dogmáticas que tuvo que aceptar para aprobar una asignatura.

Para cerrar este tema de la racionalización y cómo es tratado en el libro de texto, el último cuadro extraído, muestra los tipos de denominadores, para los cuales se dan reglas de transformación respectivas. Las únicas restricciones que aquí se dan, como también se observa en este cuadro, son las que tienen relación con la anulación del denominador, pero siguen omitiéndose las que corresponden al objeto radical.

3. Raíz cuadrada de un número complejo.

Al finalizar el capítulo II de álgebra en \mathbb{R} se trata a modo introductorio la logaritmicación, y antes como penúltimo contenido, la raíz cuadrada de un número complejo. El desarrollo de este tema es mediante la representación por pares ordenados. Se observa que la noción de raíz cuadrada que utiliza es la que extiende de \mathbb{R} a \mathbb{C} y no involucra al radical cuadrado, más que para emplearlo en la descripción de las soluciones:



El sistema $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $x^2 - y^2 = a$

da valores positivos para x^2 e y^2 y por lo tanto:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})}$$

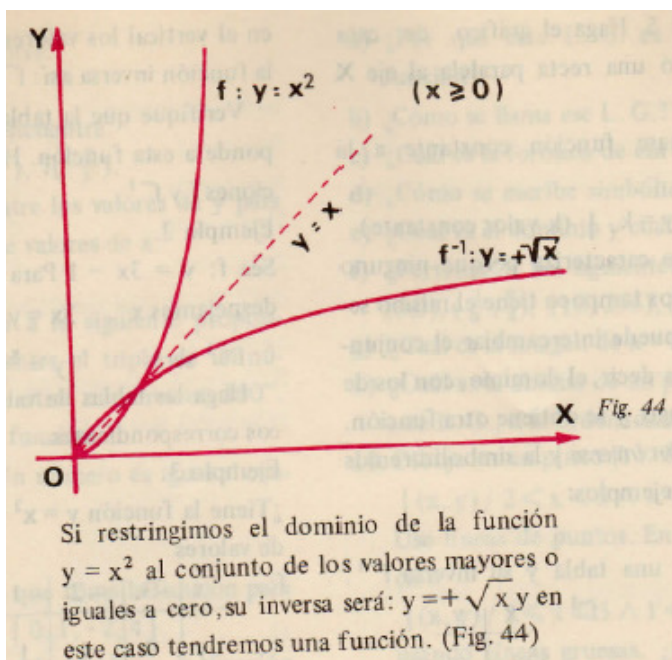
Eligiendo un signo para x el signo de y resultará del signo de b en la relación $2xy = b$

De lo anterior se desprende que *un número complejo tiene dos raíces cuadradas.*

Se observa que los dos valores no se obtienen a partir del radical como lo trató en R.

4. Función Raíz cuadrada.

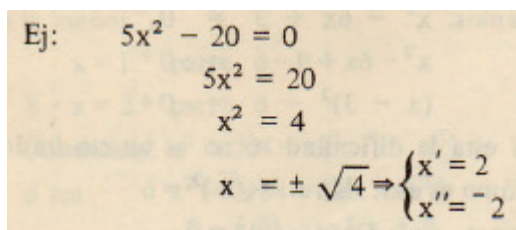
La única mención que hace el texto a la función raíz cuadrada (en rigor, función radical de orden dos, o bien, raíz cuadrada positiva), lo hace en el capítulo III, en que estudia generalidades de funciones y ecuaciones. En la página 64 viene la siguiente representación gráfica:



Hemos decidido citar este ejemplo, puesto que en el contexto funcional, aparece la función $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$ construida como inversa de $f(x) = x^2$, ambas definidas en los números reales no negativos. A pesar que es el único vínculo en este punto acerca de la expresión \sqrt{x} , no hay articulación entre los discursos encontrados en el capítulo II de los que vimos que caía en el error del doble signo y ahora como función trabaja con la raíz cuadrada positiva.

5. Ecuaciones cuadráticas.

En la resolución de ecuaciones, a pesar de los errores comentados, utiliza correctamente el signo radical:



Ej: $5x^2 - 20 = 0$
 $5x^2 = 20$
 $x^2 = 4$
 $x = \pm \sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -2 \end{cases}$

En este desarrollo no factoriza, sino “despeja” la incógnita. Si fuera coherente con su errónea presentación, debiera haber hecho $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4}$ de donde habría obtenido el par de valores 2 o -2, ya que se había dicho que $\sqrt{4} = 2$ o $\sqrt{4} = -2$ (p.42). Sin embargo, acá el proceso es correcto. Tenemos un caso en que el objeto de estudio es estudiado equivocadamente, pero en sus estatus de herramienta se emplea correctamente.

Finalmente, encontramos que en la página 76, bajo el título “Discusión de la ecuación cuadrática”, introduce el concepto de “raíces de una ecuación” como “los valores verdad o conjunto soluciones de la ecuación”. Al respecto, recién en este tema llega al concepto matemático de raíz, el que es independiente de la notación con el signo radical, pero mal comunicado, pues: Nuevamente, los autores incurren en un error conceptual: Las raíces de la ecuación no corresponden a valores de verdad, sino

corresponde a números del conjunto de referencia en que se resuelve la ecuación que la satisfacen y por tanto hacen que el valor de verdad de la igualdad dada por la función proposicional abierta sea verdadero. Por otra parte, cuando señala que es el conjunto de soluciones, tampoco está bien expresado, puesto que las raíces son los elementos del conjunto solución, conocido el universo en que se resuelve la ecuación.

6. Ecuaciones con radicales.

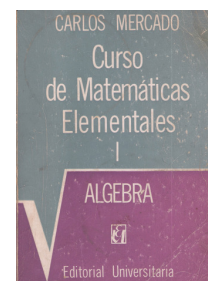
En la página 79, estudia las ecuaciones que denomina “irracionales”. Ya hemos comentado que el nombre no es adecuado. Una gran sorpresa si se puede apreciar en este texto en este tipo de ecuaciones. Los autores explican que el paso de la elevación a un determinado número para eliminar una o más expresiones radicales acarrea el uso de ecuaciones no equivalentes, por tanto, las transformaciones algebraicas que se realizan no son todas reversibles. Y avanzan más aún: En un primer momento, resuelven las ecuaciones que ejemplifican y comprueban por reemplazo si los valores obtenidos satisfacen o no a la ecuación.

Luego proponen otra forma para resolver estas ecuaciones, el que va en el estudio del dominio de las expresiones radicales involucradas y desarrollan ejemplos completos de esto. Así vemos que el tratamiento de estas ecuaciones es el adecuado, con las justificaciones correctas del procedimiento habitual de resolución.

5.2.5.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 5a.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

Este dispositivo se titula “Curso de Matemáticas Elementales Vol. I Álgebra”. Es un libro nacional que se comercializa en el mercado particular.



• MIGt2: Datos de Autoría.

La autoría de este libro de texto corresponde a un solo autor: es Miembro de la Real Academia de Farmacia de España; Miembro de la Academia de Ciencias Farmacéuticas de Chile; Miembro H. del Colegio Químico-Farmacéutico y Bioquímico de Chile; Miembro de la Junta Directiva de la Universidad de La Serena; Profesor de la Escuela Militar Bernardo O'Higgins; Profesor de la Facultad de Química y Farmacia U. de Chile; Profesor del Colegio Santa Úrsula; Ex Profesor de: Liceo de Aplicación; Liceo Federico Anisen; Escuela Superior de Correos y Telégrafos; Facultad de Filosofía y Educación U. de Chile; Instituto Luis Campino.

Según estos datos, se puede observar parte de la trayectoria que ha tenido el autor, hasta la fecha de dicha publicación, la cuál muestra una diversidad de ambientes educativos, la que le da un interés particular al tratamiento de los contenidos.

• MIGt3: Edición y Tipo de Obra.

Pertenece a la Editorial Universitaria S.A. El texto revisado corresponde a su 1° edición fechada en 1974. En relación al tipo de obra, ésta corresponde a un compendio destinado a estudiantes de la enseñanza media y preuniversitaria, lo que se explicita en su primera plana. No aparece mayor información.

• MIGt4: Presentación física.

Se compone de un total de 298 páginas blancas impresas en color negro y cuyas dimensiones son 18,5 cm por 26,4 cm.

5.2.5.2 Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 5a.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Su propuesta la organiza en 29 unidades, que corresponden en su mayoría a las mismas que son llamados capítulos en su versión antecesora de 1968 y que describimos como obra 4. El siguiente cuadro muestra los contenidos centrales de cada capítulo.

Tabla 5.7. Organización temática del texto 5a

Unidad	Nombre	Descripción
1	Conocimientos fundamentales de conjuntos	Estudia los conceptos básicos de la teoría de conjuntos, las operaciones conjuntistas, producto cartesiano, relaciones y funciones, hasta la noción de estructuras algebraicas y de isomorfismo.
2	Álgebra: conceptos y operaciones fundamentales	Estudia los conceptos de expresión y término algebraico, valor absoluto, adición y sustracción algebraica, uso de paréntesis.
3	La Multiplicación	Estudia la regla de los signos, la multiplicación y división de potencias, multiplicación de monomios y de polinomios, los productos notables y factorización.
4	La División	Estudia la división por un monomio, por un polinomio, la divisibilidad numérica, fracciones, mcm y mcd.
5	Números racionales, fracciones comunes y decimales	Se estudian las operaciones con fracciones.
6	Ecuaciones	Estudia la resolución de ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros, fraccionarios y literales, además de ocuparse de la relación entre el cero y el infinito (el caso de la división entre cero).
7	Razones y Proporciones	Estudia los conceptos de razón y proporción para derivar en el cálculo de la cuarta, la tercera y la media proporcional. También se ocupa de tratar series de proporciones.
8	Problemas por plantear	Estudia el lenguaje algebraico y la resolución de problemas verbales.
9	Potenciación	Estudia las potencias de exponente entero, y la división de polinomios por medio del teorema del factor.
10	Ecuaciones exponenciales	Estudia la resolución de ecuaciones exponenciales reducibles a ecuaciones de primer grado.
11	Radicación	Estudia la extracción de raíz como operación inversa a la potenciación, su relación con las potencias de exponente fraccionario, el álgebra de radicales, el algoritmos para extraer raíz cuadrada aritmética, los números irracionales, racionalización y una introducción a los números complejos.

12	Ecuación cuadrática o de segundo grado	Estudia la resolución de ecuaciones cuadráticas, bicuadráticas, las propiedades de las raíces y la gráfica de la función ⁶ de segundo grado, la naturaleza real o compleja de las raíces de la ecuación cuadrática.
13	Ecuaciones irracionales	Estudia la resolución de ecuaciones irracionales que se reducen a ecuaciones de primer o segundo grado.
14	Sistema numérico	Estudia el sistema numérico de los números reales y de los números complejos, con énfasis en su gráfica.
15	Resumen de conocimientos de geometría	Abarca el concepto de área de polígonos y algunos teoremas de la geometría de proporciones, entre los que destacan el teorema de Euclides y el de Pitágoras.
16	Sistema de coordenadas	Estudia diversos sistemas de coordenadas como el cartesiano, oblicuo y el rectangular, el sistema polar y el sistema ortogonal en el espacio.
17	Funciones. Representación gráfica	Estudia el concepto de función, de proporcionalidad directa e inversa, la ecuación de la recta y representación gráfica de funciones de segundo grado.
18	Resolución algebraica de Sistemas de ecuaciones	Estudia ampliamente los sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticos con dos y tres incógnitas.
19	Intervalos. Desigualdades e inecuaciones	Estudia las desigualdades y sus propiedades, las inecuaciones de primer grado, sistemas de inecuaciones de primer grado con un a y dos incógnitas.
20	Determinantes	Estudia el cálculo de determinantes y sus aplicaciones a los sistemas de ecuaciones.
21	Sucesiones y series	Estudia algunas sucesiones elementales y su forma general, y el concepto de serie como suma de los términos de una sucesión.
22	Inducción Matemática	Estudia el concepto de inducción y se desarrollan demostraciones simples de divisibilidad.
23	Teorema del Binomio de Newton	Estudia los coeficientes binomiales, los factoriales, el triángulo de Pascal y el teorema del binomio.
24	Progresiones	Estudia los conceptos, propiedades y problemas referidos a progresiones aritméticas, geométricas y armónicas.
25	Sumatoria	Estudia el cálculo de sumatoria por medio de sus propiedades fundamentales.
26	Análisis combinatorio	Estudia el conteo en permutaciones, combinaciones, y arreglos.
27	Cálculo de probabilidades	Estudia el cálculo de probabilidades por medio de la regla de Laplace, los sucesos simples y compuestos y algunas propiedades.
28	Productos binomiales especiales	Estudia la generalización de potencias de binomios para exponentes naturales.
29	Teoría de errores	Estudia los conceptos de error absoluto y error relativo.
Tablas		De cuadrados, cubos, raíces, logarítmicas, trigonométricas.

Según esta organización, interesa examinar en detalle la unidad 11° como objeto de estudio, y como herramienta se sitúa en el ambiente algebraico en las unidades 12° y 13°.

⁶ Esto²² es lo que realmente hace, pues en su índice aparece bajo el nombre de “gráfica de la ecuación de segundo²³ grado”, lo que sabemos, es un error conceptual, pues de ser sólo la gráfica, se tendría como gráfica, dos puntos, uno o ninguno de la recta real.

• MACt2: Tipo de Presentación de los contenidos.

El texto presenta los contenidos partiendo de la definición en la mayoría de los casos, pasando luego a ejemplos y dando una serie de ejercicios para la práctica. Se ajusta así a la categoría de presentación Axiomática, mientras que en relación a las actividades propuestas, que corresponden a listados de ejercicios para automatizar técnicas, queda perfectamente clasificado como Mecanicista. Así se le asigna a esta obra en este campo, el par (A, M).

• MACt3: Ecología de los radicales en el libro de texto.

Los radicales se presentan como objeto de estudio en la Unidad 11°, cuyo título es Radicación. Se trabaja de forma deductiva, con pseudo – institucionalizaciones por medio de radicales enésimos.

La organización que permite mirar la ecología en que se estudian aquí los radicales es la siguiente:

- 1) Definición (de radicación).
- 2) Operaciones inversas.
- 3) Potencia de exponente fraccionario.
- 4) Transformar una raíz en potencia de exponente fraccionario.
- 5) Amplificar y simplificar una raíz.
- 6) Extraer raíz cuadrada.
- 7) Multiplicar raíces de igual índice.
- 8) Extraer raíz de un producto.
- 9) Dividir raíces del mismo índice.
- 10) Extraer raíz de un cuociente o de una fracción.
- 11) Raíz de una potencia.
- 12) Raíz de una raíz.
- 13) Números racionales e irracionales.
- 14) Racionalización de denominadores.

- 15) Introducir el coeficiente de una raíz como factor del subradical.
- 16) Signos de una raíz.
- 17) Potencias de i .
- 18) Número complejo.
- 19) Ubicación de los números imaginarios y complejos.

Y finaliza la unidad con ejercicios de recapitulación sobre potencias y raíces.

El entorno en que viven los radicales (que son llamados raíces en el texto), son trabajados primero desde su definición y notación (temas 1 al 4), luego sus propiedades (temas 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 15), su estudio aritmético (temas 6 y 13), aplicaciones (tema 14) y extensiones (temas 17 y 18). Sin embargo, el tema 16 “signos de una raíz” no corresponde al hábitat del concepto de radical o al que el autor llama raíz.

De un total de 298 páginas, el estudio de la radicación en esta unidad ocupa 18 páginas, además de la Unidad 13° llamada “ecuaciones irracionales” que se extiende por 6 páginas, de modo que el objeto en si tiene un lugar de 24 de las 298 páginas, esto es, aproximadamente el 8% del compendio.

<ul style="list-style-type: none">• MACT4: Presentación de los radicales.
--

La presentación de los radicales es la que da inicio a la unidad donde aparece la definición de radicación.

1. Definición

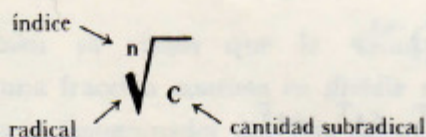
De $x^2 = 25$ se obtiene $x = 5$ pues $5^2 = 25$; se dice que 5 es la raíz cuadrada de 25 y se escribe $\sqrt{25} = 5$. Análogamente de $x^3 = 64$ se obtiene $x = 4$ pues $4^3 = 64$; se dice que 4 es la raíz cúbica de 64 escribiéndose $\sqrt[3]{64} = 4$.

De $x^5 = 243$ se obtiene $x = 3$ pues $3^5 = 243$ y se escribe $x = \sqrt[5]{243} = 3$.

En general, un número x es la raíz n -ésima de otro número c si se verifica que $x^n = c$.

Por lo tanto: $x = \sqrt[n]{c}$

En la expresión $\sqrt[n]{c}$ el signo $\sqrt{}$ se llama raíz o radical, la n es el índice de la raíz y c es la cantidad subradical.



El autor señala como raíces n -ésimas no sólo a los números que satisfacen la ecuación $x^n = c$, sino que también (y he aquí un primer error) las denota por $\sqrt[n]{c}$.

La definición no muestra en qué ámbito numérico se ubica. Por los ejemplos que da, el contexto parece ser \mathbb{N} . Si se declara como ámbito numérico el de los reales no negativos, la formalización sería correcta, pero al omitir esta información, da lugar a las erróneas conceptualizaciones que interesa

observar, como rupturas del Saber a Enseñar con el Saber Matemático, que se evidencian en la divulgación. Tampoco se explicita la extensión al cero, para dotar de significado a $\sqrt[n]{0}$, aunque sólo se podría tomar de la definición general aplicándola al caso en que $c = 0$.

La situación es salvable inspeccionando la serie de doce ejercicios que presenta, de los cuales los primeros ocho son numéricos y pide calcular operaciones elementales, como por ejemplo en $\sqrt{9} + \sqrt{25}$ o en $\sqrt{a^2} + \sqrt[3]{b^3}$, cuyas soluciones que da, son respectivamente 8 y $a + b$. No se aprecia el error del doble signo aquí, pero para el caso del ejercicio con literales, tampoco se informa que estos representen números no negativos (o al menos positivos), donde lo obtenido $a + b$ sería correcto.

Luego de la definición examinada, el texto sigue exponiendo el tema 2 “Operaciones inversas”, donde se aferra a esta idea ilustrada por la relación entre adición y sustracción, multiplicación y división; y así con la potenciación y la radicación, para concluir que:

Por definición se tiene que si a una cantidad A se la eleva al exponente n y a continuación se le extrae la raíz n (raíz n -ésima), la cantidad A no varía. Es decir:

$$\sqrt[n]{A^n} = A \quad ; \text{ o bien } \quad (\sqrt[n]{A})^n = A$$

Cuando expresa la palabra “cantidad”, no la atribuye a ningún conjunto numérico. Hasta aquí, sigue la interrogante del ámbito numérico de referencia, pues otra vez, en los ejercicios, no se da el error del doble signo, sin embargo, tampoco hay casos en que se haga alusión al hecho que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Llega el turno al tema 3 “Potencia de exponente fraccionario”, donde se presenta el cambio de notación para la raíz n -ésima instalada por el autor.

Sea $a = b^{\frac{p}{n}}$; al elevar ambos miembros al exponente n se obtiene $(a)^n = (b^{\frac{p}{n}})^n$ lo que da: $a^n = b^p$. Aplicando a esta última igualdad la definición de raíz resulta $a = \sqrt[n]{b^p}$. Por lo tanto, de esta igualdad y de la escrita al comienzo se obtiene:

$$b^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{b^p}$$

No hay restricción alguna ni se sabe aún el conjunto de referencia. Se observan al menos dos problemas al respecto: El paso a la expresión de potencia de un radical que desarrolla, requiere suponer que la propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$ que se trabajó previamente en el texto para

exponentes enteros, ahora se cumple para exponentes fraccionarios, lo que sólo se utiliza en el discurso, sin dar cuenta de tal hipótesis.

El otro problema de esta presentación, es que se requiere restringir la base a los reales positivos, acorde al estatus que toma la expresión a^x cuando se trata como función exponencial en el edificio matemático.

El tema 4 “Transformar una raíz en potencia de exponente fraccionario”, ofrece la conversión leída en sentido inverso, con los mismos problemas de definición ya señalados.

En las secciones de ejercicios propuestos y al revisar las soluciones publicadas en el mismo texto para los temas 3 y 4, se observa que se utilizan siempre bases o radicandos positivos o bien literales, de los que no se da ninguna referencia. Así, vemos que se instala un sentido netamente instrumental en la manipulación de este tipo de expresiones.

Avanzando hasta el tema 16: “Signos de una raíz”, se presenta una clasificación de los radicales según índice y cantidad subradical. Para el primer grupo de las “raíces de índice impar”, muestra con tres ejemplos que al hacer extracción de raíz, el resultado tiene el mismo signo de la cantidad subradical. Para el caso de la “raíz de índice par de un número positivo”, se vuelva al error del doble signo:

2. Raíz de índice par de un número positivo:
 tiene dos valores reales, iguales en su valor absoluto, pero de signo contrario.
 $\sqrt{9}$ = puede ser tanto + 3 como - 3 puesto
 que $(+3)^2 = +9$ y $(-3)^2 = +9$.
 Abreviadamente se escribe: $\sqrt{9} = \pm 3$.
 Análogamente: $\sqrt[4]{625} = \pm 5$.

Se confunden aquí los conceptos de raíz y de radical (o raíz aritmética). Curiosamente, el error no persiste cuando se desarrolla el tercer caso “raíz de índice par de un número negativo”, en el que introduce el concepto de número imaginario, dando

paso a las potencias de la unidad imaginaria i , trabajando este número con la notación $\sqrt{-1}$ y como llama i a esta expresión no incurre en la trascendencia del error del doble signo de \mathbb{R} a \mathbb{C} , mostrando que $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot -1} = 5i$. Nótese que se está suponiendo la extensión del teorema en los reales $(\forall a \in \mathbb{R}_0^+)(\forall b \in \mathbb{R}_0^+) : \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, al caso en que uno de los números a o b y sólo uno de ellos es menor que cero. Lo curioso está que en este desarrollo $\sqrt{25} = 5$, que como ilustramos con la cita anterior, no se condice esta opción con la forma en que concibe la raíz de índice par de un número positivo (en este caso 25), de modo que si hubiera sido congruente con su propio discurso (o al menos clarificar por qué no lo sigue), debiera haber hecho $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot -1} = \pm 5i$.

• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

El tratamiento de las propiedades de los radicales lo hace con la siguiente secuencia, tomada de la organización de la unidad de radicación que estamos examinando, ya mencionada en la descripción de su ecología en el campo MACt3:

- 5) Amplificar y simplificar una raíz.
- 7) Multiplicar raíces del mismo índice.
- 8) Extraer raíz de un producto.
- 9) Dividir raíces del mismo índice.
- 10) Extraer raíz de un cuociente o de una fracción.
- 11) Raíz de una potencia.
- 12) Raíz de una raíz.
- 15) Introducir el coeficiente de una raíz como factor subradical.

Ante todo, recordamos que el tema 6 no se considerará para su descripción, ya que aborda el algoritmo de extracción de raíz cuadrada, en un contexto aritmético y no algebraico, tal como ocurre con el tema 13 que trata de los números racionales y los irracionales. El tema 14 en tanto de racionalización, será descrito y analizado en el próximo campo MACt6 por tratarse de una aplicación de los radicales.

Esta secuencia muestra que hay propiedades que son expuestas unilateralmente y no se da sentido algebraico al uso del signo igual. Al revisar las propiedades señaladas en 7) a la 10) llama la atención que sólo se trabaje con “el mismo índice”, sin hacer referencia al uso de estas propiedades con índices distintos, vía previa transformación generada por la amplificación y simplificación estudiadas en el tema 5.

A continuación entramos en el detalle de cada una de las propiedades enlistadas:

5) Amplificar y simplificar una raíz.

Comienza con el subtítulo a) Amplificar una raíz. Su tratamiento es netamente reglado, o sea, da la regla basándose en la notación de potencia del radical, sin uso de restricciones.

a) *Amplificar una raíz* consiste en multiplicar el índice de la raíz y el exponente del subradical por una misma cantidad. En efecto:

$$\sqrt[n]{b^p} = b^{\frac{p}{n}} \quad (\text{amplificada esta fracción por } a \text{ resulta})$$

$$= b^{\frac{p \cdot a}{n \cdot a}} = \sqrt[n \cdot a]{b^{p \cdot a}}$$

Ofrece 3 ejemplos: uno literal seguido de dos numéricos de base positiva. Continúa con el subtítulo “Simplificar una raíz”, dada en el mismo tenor que la amplificación.

b) *Simplificar una raíz* consiste, por lo tanto, en dividir el índice y el exponente del subradical por una misma cantidad.

$$\sqrt[n]{b^p} \quad (\text{simplificada por } a \text{ se obtiene}) = \sqrt{\frac{n}{a}}{\frac{p}{a}}{b^{\frac{p}{a}}}$$

No hay dominios de validez para ninguno de los literales involucrados en esta seudo – formalización. Aquí no hay ejemplo, pues va directo a los ejercicios propuestos. Éstos son 8, sin lugar a manifestar condiciones en que se pueden efectuar los procedimientos de amplificación y simplificación expuestos. Dentro de los ejercicios, desarrollaremos uno que es preocupante a primera vista. Se pide calcular $\sqrt[1.5]{-8}$.

Un desarrollo que es esperable por el autor, según se infiere por la respuesta que da en el solucionarlo de estos ejercicios, es probablemente éste:

$$^{-1,5}\sqrt{-8} = \frac{-3}{2}\sqrt{-8} = (-8)^{-\frac{1}{3/2}} = (-8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(-8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4} = 0,25$$



De estos 8 pasos, inquieta el paso 2, pues la transformación a potencia requiere restringir la base a los números reales positivos, por lo que la regla de conversión no corresponde al Saber matemático, sino a un recorte de él en que se ha omitido información y por tanto es causal de error conceptual.

El procedimiento anterior puede cambiarse por la amplificación por -2 aplicada al radical, de modo que $^{-1,5}\sqrt{-8} = \sqrt[3]{(-8)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} = 0,25$. En este caso, que se evita pasar por la notación de potencia, también hay un paso en falso. La propiedad llamada de amplificación para radicando negativo se define para índices pares o bien impares, esto es, enteros, pero como aquí vemos se tiene un índice que sale del contexto de definición de la amplificación de radicales, por tanto, no hay paso a seguir aquí.

7) Multiplicar raíces del mismo índice.

7. Multiplicar raíces del mismo índice

Demostraremos que:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

En efecto, expresando cada una de las raíces en potencias de exponente fraccionario queda un producto de potencias de igual exponente obteniéndose sucesivamente:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

Luego: »Para multiplicar raíces del mismo índice se conserva el índice y se multiplican las cantidades subradicales«.

Esta propiedad es enunciada sin restricciones. Se pasa de inmediato a la demostración sin ejemplos intermedios, y más aún, tampoco los hay luego de la prueba. Se sigue un listado conformado por 15 ejercicios propuestos con respuestas. Todos son numéricos excepto 1 que contiene literales.

Los numéricos tienen radicandos positivos, y en ningún caso interviene uno al menos para preguntarse qué ocurre si la cantidad subradical fuera negativa.

Por otra parte, examinando ahora la demostración, se observa que está basada en el cambio de representación radical – potencia, basándose en una propiedad de las potencias no probada para exponentes racionales no enteros.

8) Extraer raíz de un producto.

Nótese ahora el siguiente enunciado de la propiedad sucesiva:

El ser expuesta con otro nombre y con otra enumeración, la hace ver como una propiedad relacionada con la anterior, si se quiere, pero distinta. El empleo del signo igual acá es el que

8. Extraer raíz de un producto:

Se extrae raíz de cada uno de los factores.

En efecto, no es más que el caso recíproco del anterior.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \implies \boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

demanda el error de tipo conceptual. Entrando en mayor detalle, el autor utiliza el concepto de “recíproco” cuando en realidad es el caso simétrico (en relación a la propiedad de la igualdad como relación de equivalencia). Si estuviera en lo correcto, no debería escribir este hecho como teorema con una condición sólo necesaria, pues también es suficiente, es decir, también se mal emplea la flecha de implicación, pues si se puede leer de izquierda a derecha y viceversa, el símbolo adecuado es \Leftrightarrow . Este otro error es de tipo notacional. Nuevamente no hay restricciones, y esta propiedad no se demuestra. En el texto se aplica para descomponer radicales y los ejercicios incorporan sólo casos en que el radicando es positivo, siendo numéricos casi todos los ejercicios (13), excepto sólo 1.

Para la propiedad 9) “Dividir raíces del mismo índice” y 10) “Extraer raíz de un cociente o de una fracción”, se imita la presentación hecha para las propiedades 7) y 8):

En efecto, el cuadro de la izquierda muestra que no da ejemplos antes de entrar en la demostración, la que está basada en una propiedad de las potencias de exponente entero, no probada para exponentes racionales no enteros, por lo que obedece a errores lógicos, y enuncia finalmente la regla verbalmente, sin restricciones y sin dar ejemplos.

10. Extraer raíz de un cociente o de una fracción

Se extrae raíz de cada uno de sus términos. En efecto, como

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

empleo erróneo de la flecha de implicación, que contradice la propiedad simétrica de la igualdad.

11) Raíz de una potencia.

Como ha sido la tónica, no hay ejemplos ni restricciones a la hora de la formalización. Si hay una demostración que conlleva un error esta vez no del tipo lógico, sino a nivel de vocabulario asociado a la multiplicación y a la potenciación.

9. Dividir raíces del mismo índice

La expresión $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ escrita en forma de potencia de exponente fraccionario es $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ lo que equivale a dividir potencias de igual exponente. Por lo tanto resulta:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Luego:
$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

»Para dividir raíces del mismo índice se dividen las cantidades subradicales y se conserva el índice«.

En el cuadro de la izquierda se evidencia que el autor vuelve a cometer los mismos errores que enunció al tratar la “raíz de un producto”, es decir, no considerar la simetría de la igualdad (como relación de equivalencia) y el

11. Raíz de una potencia

Sabemos que $b^p = b \cdot b \cdot b \dots (p \text{ veces } b)$. Por lo tanto $\sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{b \cdot b \cdot b \dots (p \text{ veces } b)}$
 $= \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \dots (p \text{ veces } \sqrt[n]{b}) = (\sqrt[n]{b})^p$.

Luego:

$$\boxed{\sqrt[n]{b^p} = (\sqrt[n]{b})^p}$$

Es decir: »Para extraer raíz de una potencia se extrae primeramente la raíz de la base y el resultado se eleva al exponente«.

La palabra “veces”, se utiliza como sabemos, asociada al campo multiplicativo en \mathbb{N} , en su faceta de operador, es decir, como una manera de abreviar una adición de sumandos iguales. En las potencias de exponente natural, el significado de a^n correcto es: $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ contando aquí NO n veces a , sino n factores a , puesto que n veces a es na , para $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

En cuanto a las restricciones de esta propiedad, no se da ninguna. La omisión da lugar a su empleo en contextos no aptos como $\sqrt{(-8)^4}$ cuyo desarrollo podría pensarse

como $\sqrt{(-8)^4} = (-8)^{\frac{4}{2}} = (-8)^2 = 64$ o bien tal como da la demostración, al hacer:

$$\sqrt{(-8)^4} = \sqrt{(-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8)} = \sqrt{-8} \cdot \sqrt{-8} \cdot \sqrt{-8} \cdot \sqrt{-8} = (\sqrt{-8})^2 \cdot (\sqrt{-8})^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$$

Sólo el primer y último paso son correctos y están en el contexto de \mathbb{R} , pues se aplicó la definición de potencia de base real y exponente natural. El segundo paso aplica un teorema de radicales válido en \mathbb{R} y por tanto para radicandos no negativos. El tercer paso trae el problema de operar con números que no son reales. El cuarto paso aplica el hecho de que $(\sqrt{a})^2 = a$, lo que en \mathbb{R} es válido si $a \geq 0$, lo que no ocurre.

12) Raíz de una raíz.

12. Raíz de una raíz

La expresión $\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}}$ corresponde a la raíz m de la raíz n de b que puede escribirse sucesivamente al transformar las raíces en potencias de exponente fraccionario y viceversa:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{b^{\frac{1}{n}}} = b^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{b}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b}}$$

»Para extraer raíz de una raíz se conserva la cantidad subradical y se multiplican los índices«.

La presentación al igual que las anteriores, no trae ejemplos, da la demostración inmediatamente con errores lógicos, pues basa el fundamento en un teorema de potencias probado para exponentes enteros pero no para los racionales no enteros. Tampoco hay restricciones establecidas. Esta omisión de radicandos negativos, ocasiona errores

cuando se muestran estas expresiones destacadas en marcos rectangulares, pues se subentiende que son siempre válidas, para todos los números y no se problematiza o repara como se ha visto, en todo el discurso de este texto, el contexto o ámbito en que viven estas propiedades.

Observando además el listado de los 6 ejercicios propuestos, todos comprenden el uso del signo igual unilateralmente.

15) Introducir el coeficiente de una raíz como factor subradical.

Al contrario de las propiedades anteriores, si se comienza aquí con un ejemplo que sugiere la propiedad. No se da demostración para este caso, tampoco las restricciones.

Esta propiedad es la misma que el autor presenta en 4 planas antes, pero leída de derecha a izquierda. Una vez más se detecta desconexión fragmentando un mismo teorema en dos partes, de lo que se confirma que el autor concibe el signo igual unilateralmente, en un sentido netamente aritmético y que no ha evolucionado al álgebra, curiosamente se trata de un libro examinado de álgebra.

Mostramos aquí el discurso dado 4 planas atrás.

Si se observan los ejercicios propuestos, corresponden a una aplicación de

$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$ en el sentido de izquierda a derecha.

Se toma como otra propiedad la lectura en el

15. Introducir el coeficiente de una raíz como factor del subradical

El producto $2 \sqrt{0,5}$ puede escribirse $\sqrt{4} \cdot \sqrt{0,5}$ puesto que $\sqrt{4} = 2$. Así llegamos a un producto de raíces del mismo índice que, al efectuarlo, se obtiene: $\sqrt{4 \cdot 0,5} = \sqrt{2}$. Si hubiésemos tenido $2 \cdot \sqrt[3]{0,5}$ habría que escribir $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{0,5} = \sqrt[3]{8 \cdot 0,5} = \sqrt[3]{4}$.

En general, si se tiene $a \cdot \sqrt[n]{b}$ se obtiene sucesivamente:

$$\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Luego: $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

»El coeficiente de una raíz pasa como factor del subradical elevándolo al índice de la raíz«.

A) Muchas de las raíces que no son exactas pueden expresarse en producto de dos factores de los cuales uno debe tener raíz exacta. Por ejemplo: $\sqrt{24}$ puede descomponer en $\sqrt{2 \cdot 12}$ o en $\sqrt{3 \cdot 8}$ o bien $\sqrt{4 \cdot 6}$; pero de estas tres factorizaciones la que más conviene para nuestro objetivo es la última puesto que 4 tiene raíz exacta. Luego:

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$$

En forma análoga descomponer y calcular las raíces siguientes:

5) $\sqrt{8}$;

6) $\sqrt{50}$;

7) $2\sqrt{125}$;

8) $5 \sqrt[4]{48} + \sqrt[3]{108}$

sentido contrario, para lo cuál y pero aún, el autor escribe en orden inverso la propiedad: $a^n\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Con este tipo de discurso, se esperaría que los estudiantes no sean capaces de comprender que $x = 5$ da la misma información que $5 = x$, por ejemplo.

• **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Tres son las aplicaciones que se tratan en el libro de texto desde el punto de vista algebraico, pues aparecen otras relacionadas con el tratamiento aritmético y geométrico, donde no se aprecian problemas como hemos dicho, por el empleo de números reales positivos.

Estas tres aplicaciones son: la racionalización de denominadores, que está en la misma unidad 11 de Radicación, mientras que las otras dos son: El empleo de los radicales en la resolución de ecuaciones de segundo grado (unidad 12) y en la resolución de ecuaciones irracionales (unidad 13).

El concepto de racionalización lo aplica a los denominadores de fracciones y no a numeradores. Fundamenta la necesidad de racionalizar (los denominadores) en el hecho que “sería muy engorroso y molesto” calcular a mano $\frac{4}{\sqrt{2}}$, por la infinitud de cifras del divisor y por tanto no sería posible la amplificación por una potencia de base 10 (infinita).

En el mismo párrafo que expone la necesidad mencionada, resuelve tal dificultad con este procedimiento, que “transforma la expresión dada en otra que tenga denominador racional (sin raíces)”. Ahora bien, analizando esta frase, encontramos algunos elementos al menos inquietantes:

- No se indica que tal transformación no cambia el cociente indicado.
- Se favorece a concebir las expresiones que emplean el signo radical como irracionales, por lo que la irracionalidad es tratada como una característica

asociada a la notación radical y por otra parte, existe una infinidad de expresiones numéricas como cualquier número trascendente (e , π , entre los más famosos) de naturaleza irracional que no se denotan con $\sqrt{\quad}$, y otros que empleándolo como $\sqrt{\pi}$, no se podrán “racionalizar”. Estas limitantes no son materia de estudio en el discurso del libro de texto.

En cuanto a las técnicas de racionalización, expone cuatro casos, en los que al revisarlos, llama la atención las denominaciones que les da:

Primer caso: Cuando el denominador es un monomio irracional.

Segundo caso: Cuando el denominador es un binomio irracional.

Tercer caso: Cuando el denominador es un trinomio o cuatrimonio irracional.

Cuarto caso: Cuando en el denominador las raíces no son raíces cuadradas.

Entiende por irracional, para los tres primeros casos la intervención de expresiones que se denotan empleando el signo radical de orden dos, lo que es aún más restringido que el concepto de irracional que opera en otros lugares del texto. El cuarto caso, que en realidad describe la técnica para denominadores de la forma $a\sqrt[n]{b^p}$, tiene un nombre por el contrario a los casos anteriores, demasiado general, pues también entran según la etiqueta asignada, denominadores de diversos tipos como por ejemplo $a\sqrt[m]{b} + c\sqrt[p]{d}$.

En la unidad 12, se observa que la resolución de ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$ con $a \neq 0$ la efectúa “aislando” el término con x^2 y en coherencia a su discurso anterior, comete el error del doble signo:

1) $2x^2 - 15 = 17$

Esta ecuación se resuelve fácilmente con sólo aislar el término con x^2 . Se obtiene:

$$2x^2 = 32$$

$$x^2 = 16 \implies x = \sqrt{16} = \pm 4$$

Como la ecuación es de 2º grado, tiene dos *soluciones* o *raíces* que es costumbre designarlas por x' , x'' o por x_1 , x_2 .

En este ejemplo, las dos »raíces« de la ecuación son

$$x' = 4; \quad x'' = -4;$$

o bien: conjunto solución = $\{4, -4\}$

A partir del radical, es la extracción de raíz la que genera las dos soluciones o raíces como señala.

Se puede notar también que utiliza la palabra raíz como solución de una ecuación, por tanto, las raíces de la ecuación, no son otra cosa que las raíces de 16, lo que es correcto, pero a saber son $\sqrt{16}$ y la otra es $-\sqrt{16}$.

$$3x^2 = 75$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

de donde: $\begin{cases} x' = 5 \\ x'' = -5 \end{cases}$

2º. Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 900}}{6}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{900}}{6} = \frac{\pm 30}{6}$$

de donde $\begin{cases} x' = 5 \\ x'' = -5 \end{cases}$

La gran ruptura en su discurso está en la formulación de la expresión que permite hallar las raíces de la ecuación cuadrática, puesto que en tal caso el doble signo no es consecuencia de la extracción de la raíz indicada:

Este desarrollo que aparece en la página 121, muestra al lector que tiene dos posibilidades de resolver la ecuación $3x^2 = 75$. La primera es por aislamiento de la incógnita cuadrada, mientras

que la segunda aplica la fórmula general. En ésta última el \pm está antecediendo al radical, por lo que no se da como resultado de la extracción de raíz cuadrada. Y si así fuera, no tendría sentido escribir este abuso de notación, y simplemente se tendría que anteponer un + al radical.

Previamente a este ejercicio resuelto, el autor expone la deducción de la fórmula

general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para resolver cualquier ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con

$a \neq 0$, en la que se evidencia que el doble signo en cuestión, no proviene de la extracción de raíz.

Las ecuaciones con radicales las denomina “irracional” y las define como “aquellas en que la incógnita aparece como cantidad subradical”. Luego de la definición, se llega al subtítulo “Indicación metodológica”, en la que da los pasos para resolver una ecuación de este tipo, basada en “aislar la raíz” o “las raíces” si son más de una.

B) Resolver la ecuación:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} - \sqrt{9x+13} = 0$$

Como hay tres raíces conviene aislar dos en un miembro:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{9x+13}; \text{ se elevan ambos miembros al cuadrado:}$$

$$(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{9x+13})^2$$

$$2x+1 + 2\sqrt{(2x+1)(3x+4)} + 3x+4 = 9x+13$$

Se reducen los términos semejantes y se aísla la raíz.

$$2\sqrt{6x^2+3x+8x+4} = 4x+8 \quad /: 2.$$

$$\sqrt{6x^2+11x+4} = 2x+4; \text{ se eleva al cuadrado:}$$

$$(\sqrt{6x^2+11x+4})^2 = (2x+4)^2$$

$$6x^2+11x+4 = 4x^2+16x+16$$

$$2x^2-5x-12=0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4}$$

de donde $\begin{cases} x' = 4 \\ x'' = -\frac{3}{2} \end{cases}$

la única que satisface es $x = 4$.

El descarte de la otra supuesta raíz, no se menciona y se finaliza el ejemplo sin esta necesaria referencia.

Luego de dar los pasos de resolución, muestra ejemplos en los que no discute el método de resolución y la existencia de ecuaciones no equivalentes. Es más, ni siquiera precisa la comprobación de los candidatos a raíz obtenidos. Mucho menos analiza condiciones de entrada para resolver la ecuación.

Para muestra, he aquí la evidencia: Se desarrolla instrumentalmente. De las condiciones iniciales se observa que las raíces de esta ecuación deben ser mayores o iguales a $-\frac{1}{2}$. Por tanto, al llegar a las supuestas raíces,

En el resto de ejercicios propuestos, aparecen las soluciones sin indicar la necesidad de comprobar. Es decir, las admite.

5.2.6.1 Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 6a.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El libro se titula “Matemática II Medio”. Es nacional comercializado en el mercado particular.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

El equipo de autoría lo componen 3 personas:

- Autor 1.
- Autor 2.
- Autor 3.

En el texto no se da mayor información de los autores.

- **MIGt3: Edición y Tipo de Obra.**

La obra es un libro de texto dirigido al nivel de segundo año de enseñanza media, como se muestra en su portada. Es parte de la Serie “Educación Matemática Enseñanza Media”, editada por el Instituto para el desarrollo educacional americano INDEA. Tampoco se dan mayores datos de impresión ni de edición. Sólo que ha sido inscrito en 1979.

- **MIGt4: Presentación física.**

El texto se compone de 171 páginas blancas impresas en color negro. Sus dimensiones son de 17,5 cm. por 24,5 cm.

5.2.6.2 Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 6a.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Su propuesta la organiza en 4 unidades con capítulos al interior de éstas. El siguiente cuadro describe esta organización:

Tabla 5.8. Organización temática del texto 6a

Unidad	Nombre	Descripción
I	Expresiones fraccionarias en $(R, +, \cdot)$	Se compone de dos capítulos: <ul style="list-style-type: none"> • Capítulo 1: $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo. Se estudia la estructura de cuerpo que tiene R con las operaciones de adición y multiplicación. • Capítulo 2: Expresiones fraccionarias. Se estudia las operaciones con fracciones algebraicas y la resolución de ecuaciones fraccionarias.
II	Ecuaciones e Inecuaciones lineales	Se compone de dos capítulos: <ul style="list-style-type: none"> • Capítulo 3: Sistemas de ecuaciones de primer grado. Se estudian los métodos de resolución algebraicos y su interpretación geométrica para los de tipo 2×2 y se introduce la resolución de los 3×3 por el método de reducción, además de problemas verbales asociados como aplicación. • Capítulo 4: Inecuaciones de primer grado. Se estudian las desigualdades y sus propiedades, el concepto de intervalo y la resolución de inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una y dos incógnitas.
III	Potencias y Raíces	Se compone en dos capítulos: <ul style="list-style-type: none"> • Potencias: se estudian las potencias de exponente entero y sus propiedades. • Raíces: Se estudia el concepto de raíz, las operaciones con raíces y sus propiedades y la racionalización de denominadores.
IV	Geometría	Se compone de 5 capítulos: <ul style="list-style-type: none"> • Proyección y Homotecia. Se estudia los conceptos de proyección paralela y homotecia en el plano. • Segmentos proporcionales. Se estudia el teorema de Thales y la división interior y exterior de un segmento. • Semejanza y congruencia. Se estudian la semejanza y la congruencia de triángulos. • Aplicaciones de la semejanza. Se estudian las aplicaciones de los criterios de semejanza de triángulos al triángulo rectángulo y a la circunferencia. • Áreas y volúmenes. Estudia el cálculo de áreas de regiones poligonales y círculos, volúmenes de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.

En esta organización, los radicales aparecen como objeto de estudio en la unidad II, concretamente en el capítulo 6: Raíces, la que se constituye de 21 páginas de 171, de modo que aproximadamente el 12% de la obra se destina para este objeto matemático. No se aprecia la presencia en el resto de las unidades, sólo algunas apariciones en geometría, pero como está en contexto de medida, no será materia de análisis.

• **MACT2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

El texto se estructura mediante “Actividades” (numeradas) de tono netamente matemático que desarrollan los autores por completo, haciendo notar con algunos ejemplos particulares una regularidad que generalizan en la institucionalización. Como las actividades están resueltas sin dejar espacio a la construcción activa del objeto por el estudiante, categorizamos la presentación como Axiomática. Las actividades propuestas para desarrollo son en su mayoría de tipo instrumental y rutinario, por lo que las catalogamos como Mecanicistas. Por tanto se le atribuye a este libro de texto, el par (A, M), por su estructura de presentación de los contenidos.

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Los radicales se estudian en todo un capítulo, como hemos señalado el 6, que los autores trabajan bajo el nombre de Raíces. Dos son los objetivos que se plantean para su estudio: “Desarrollar expresiones con raíces aplicando sus propiedades y Operar con raíces”. Los contenidos abordados y su secuencia descrita por actividades numeradas a partir de la 38 es la siguiente:

- 20) Actividad 32⁷: Concepto de raíz.
- 21) Actividad 33: Adición y sustracción de raíces.
- 22) Actividad 34: Primer teorema sobre raíces ($\sqrt[n]{a^n} = a = (\sqrt[n]{a})^n$).
- 23) Actividad 35: Segundo teorema sobre raíces ($\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$).

⁷ En el texto aparece como 38, pero según hemos revisado, se trata de un error de imprenta.

Esta actividad se compone de 4 temáticas:

- a) Multiplicación de raíces de igual índice.
- b) Raíz de un producto.
- c) Introducir coeficientes en una raíz.
- d) Racionalización.

24) Actividad 36: Tercer teorema sobre raíces ($\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$).

25) Actividad 37: Cuarto teorema sobre raíces ($\sqrt[p]{a} = \sqrt[p \cdot r]{a^r}$).

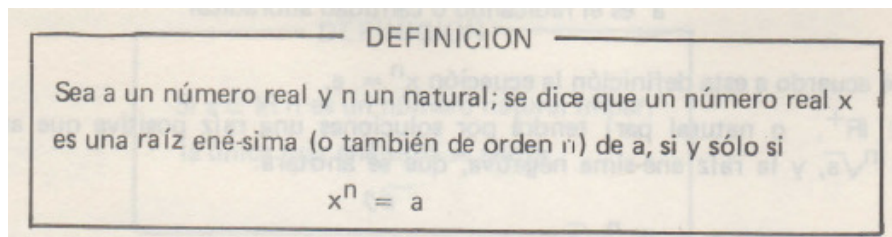
26) Actividad 38: Quinto teorema sobre potencias ($\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$).

27) Actividad 39: Potencias de base real positiva y exponente racional.

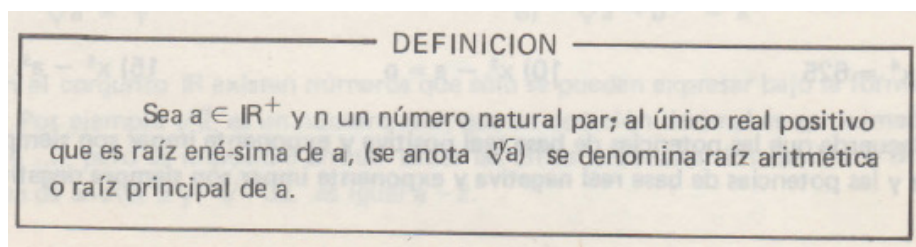
Se observa un amplio tratamiento de los radicales, por lo que cada uno de estos temas será materia de análisis en los siguientes campos de recogida de la información, con la excepción del 2) puesto que no hay propiedades de los radicales para estas operaciones.

- **MACT4: Presentación de los radicales.**

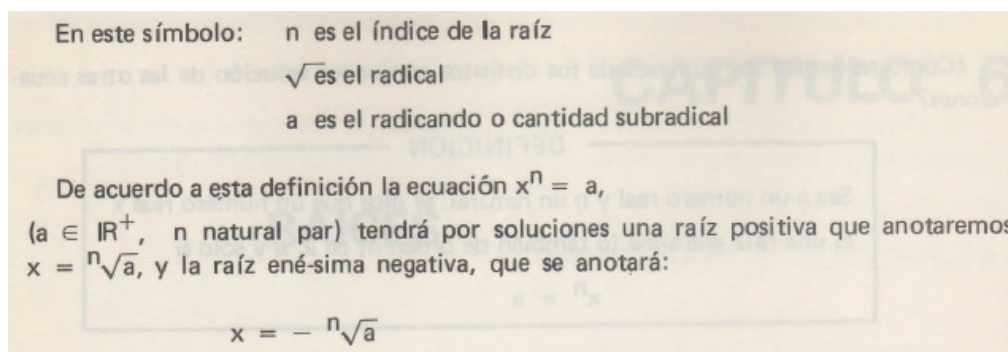
El concepto de radical aparece sólo como nombre del signo $\sqrt{\quad}$, pues el texto utiliza el concepto de raíz aritmética o principal. Se introduce primero el concepto de raíz por medio de búsqueda de números reales x que cumplan la condición $x^2 = 16$, de donde se obtienen los números 4 y -4 , los que llama raíces de índice 2 (o cuadradas) de 16, sin necesidad de emplear el signo radical.



Posteriormente, vista la necesidad de representar números cuyos cuadrados por ejemplo no sean cuadrados perfectos, incorpora el uso también correcto del signo radical, definiendo el concepto de raíz n -ésima aritmética o principal:



Puesto que trabaja en los reales positivos, no hay mención de significado para la extensión $\sqrt[n]{0}$. Tampoco se explicita que para este caso $\sqrt[n]{a} \geq 0$.



Correctamente son presentados los términos de la expresión $\sqrt[n]{a}$ y la fina distinción entre las raíces de la ecuación (o las raíces de un número real positivo), y el concepto de raíz principal o aritmética en que interviene el empleo del signo radical, dando cuenta que su opuesto también se puede denotar con el radical. Con esta definición, no queda espacio para el error del doble signo para índices pares.

Así, aunque este texto no trae como estudio las ecuaciones cuadráticas, se puede igualmente inferir lo que los autores divulgarían en tal caso, al ver el siguiente desarrollo:

Si $x^2 = 16$ sabemos que el conjunto solución es $\{4, -4\}$ lo que de acuerdo a esto último también lo podemos anotar como $\{\sqrt{16}, -\sqrt{16}\}$

Es decir:

$$\sqrt{16} = 4 \wedge -\sqrt{16} = -4$$

Por tanto, en las ecuaciones cuadráticas, tampoco se tendrá el error $\sqrt{16} = \pm 4$.

Para índices impares aparece luego su próxima definición:

DEFINICION

Si $a \in \mathbb{R}$ n es un número natural impar,
la única raíz ené-sima se anota

$$\sqrt[n]{a}$$

En este caso sí está incorporada la posibilidad $\sqrt[n]{0}$ pero para n impar, pero no se hace mención alguna de este hecho. Sólo se da el conjunto \mathbb{R} como referencial para el radicando.

En ambas definiciones para índice par o impar, se enfatiza la unicidad de la raíz enésima y se supone su existencia. Además, las restricciones son correctas, con la salvedad que en el caso de los índices pares, no se considera al cero como radicando.

• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

El texto expone en detalle varias de las propiedades utilizando el nombre formal de Teoremas. A continuación hacemos el análisis de cada una en la secuencia en que son tratadas.

En la página 79, bajo el nombre de Actividad 34, introduce el “Primer teorema sobre raíces”, que expone como sigue:

A continuación estudiaremos una serie de teoremas sobre raíces en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Recuerde que: $\sqrt[n]{a} = y \iff y^n = a$ (por definición)

En consecuencia:

i) $\sqrt[n]{a^n} = x \iff x^n = a^n$

y por lo tanto, $x = a$

luego reemplazando en i), x por a , se puede anotar $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$

Por definición $y^n = x \iff y = \sqrt[n]{x}$

Reemplace y por $\sqrt[n]{a}$ se tiene: $(\sqrt[n]{a})^n = x \iff \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x}$

y, por lo tanto, $x = a$

luego, $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a}$

En consecuencia, $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a = (\sqrt[n]{a})^n}$ 1er teorema sobre raíces

No se hace recuerdo de las restricciones para los literales, en circunstancias que este encadenamiento de pasos con los que llega a formular el teorema lo requiere, aún más observando que la primera línea indica que los teoremas se refieren a la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, donde algunas no se definen en todo \mathbb{R} , como es el caso de ésta. El teorema y los pasos que permiten su demostración, son válidos asumiendo desde el principio que $a \geq 0$, de lo contrario, en i) se tendría una condición necesaria pero no suficiente. Por otro lado, los cuadros remarcados debieran incluir el hábitat de los literales que generalizan la situación descrita, pues en esta propiedad sin el contexto numérico restringido a los reales no negativos, puede conducir al error $\sqrt[6]{(-2)^6} = -2$. En los ejercicios propuestos tampoco hay referencia a cuidar esta situación:

1. Calcule

$$\begin{array}{lll} \sqrt{a^2} = & 4) (\sqrt{a+b})^2 = & 7) \sqrt[5]{(-32)^5} = \\ 2) \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = & 5) \sqrt[5]{16^5} = & 8) \left(\sqrt[3]{-729}\right)^3 = \\ 3) \sqrt{4^2} = & 6) \left(\sqrt[5]{(a-b)^2}\right)^5 = & \end{array}$$

En la página 80, enuncia como Actividad 35 el “Segundo teorema sobre raíces”, en el cual presenta la igualdad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, que introduce como a) “Multiplicación de raíces de igual índice”, luego la b) “Raíz de un producto”, c) “Introducir coeficientes en una raíz” y contar con los conocimientos necesarios para efectuar la d) “Racionalización” de denominadores.

Ésta última temática, será examinada en el campo MACt6, ya que la hemos considerado como aplicación de las propiedades de los radicales.

Al comenzar su exposición, para la multiplicación de raíces de igual índice, da la demostración del teorema:

Considere la siguiente multiplicación:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} =$$

Si $\sqrt[n]{a} = r$ y $\sqrt[n]{b} = s$ por lo ya estudiado tenemos que:

$$1) \sqrt[n]{a} = r \iff r^n = a \qquad 2) \sqrt[n]{b} = s \iff s^n = b$$

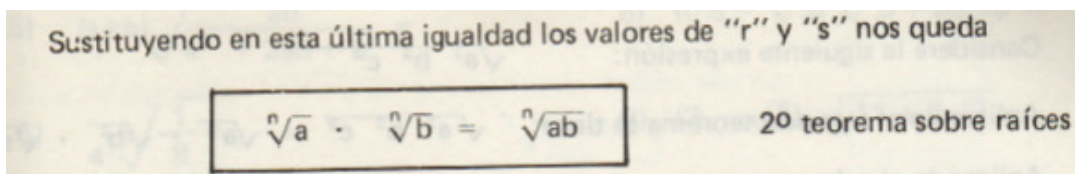
Entonces multipliquemos r^n por s^n tenemos que:

$$r^n \cdot s^n = a \cdot b$$

$$(r \cdot s)^n = ab \text{ (por la multiplicación de potencias)}$$

pero $(r \cdot s)^n = ab \iff r \cdot s = \sqrt[n]{ab}$

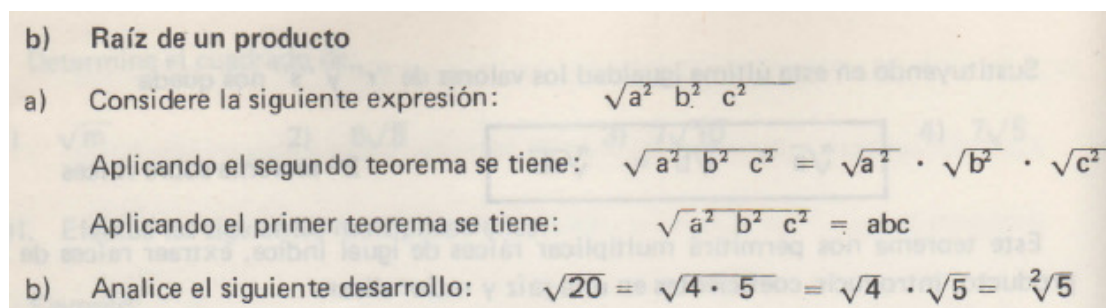
Y continúa en la plana siguiente:



La presentación es claramente deductiva y no hay construcción de la propiedad por parte del estudiante. También es posible apreciar que no da las restricciones que completan el teorema, sin embargo, la demostración es coherente desde el punto de vista formal y lógico, pues se fundamenta en la definición de raíz n -ésima principal, que aunque definida en los reales positivos, debiera planearse que el teorema no es de las “raíces” sino de las raíces principales con la notación radical.

Se sigue este tratamiento con una serie de 18 ejercicios para mecanizar esta propiedad, de los cuales sólo 5 contienen radicandos expresados por literales de los cuales tampoco se indica que deben representar números reales no negativos, o al menos positivos, según lo señalado por los autores.

Continuando con el discurso del texto, los autores dan paso al apartado b) Raíz de un producto:



Por esta forma de presentación, se nota que los autores no consideran la raíz de un producto como otra propiedad, sino como otra lectura del segundo teorema. Si se observa un error pero de imprenta, pues en la última línea en lugar de $\sqrt[2]{5}$ debiera decir

$2\sqrt{5}$. Como se puede evidenciar, no hay restricciones como ha sido la característica hasta ahora y emplea esta propiedad, como la misma enunciada anteriormente. Sigue luego con un listado de 10 ejercicios propuestos.

De igual forma hace con la parte c).

c) Introducir coeficientes en una raíz.

Considere el siguiente desarrollo:

$$x \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{y} \quad (\text{aplicando el primer teorema})$$

$$= \sqrt[n]{x^n y} \quad (\text{aplicando el segundo teorema})$$

Estudie los ejemplos siguientes:

a) $3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$ c) $10\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

La propiedad señalada se trabaja en el sentido opuesto a la raíz de un producto, sin embargo, hay una diferencia en las restricciones: Para introducir un coeficiente en un radical, éste puede ser cualquier número real sólo si el índice es impar. Por tanto, en general la propiedad debe señalar que $x \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \cdot y}$ siempre es cierto para $x \geq 0$. Esta restricción no aparece, y mucho menos la más general en que si x es un número real cualquiera, entonces la relación verdadera es $|x| \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{|x|^n \cdot y}$.

Se sigue a esta presentación 10 ejercicios para automatizar esta propiedad. En los que sólo son numéricos, se coloca como coeficiente del radical, un número positivo y en el caso de coeficientes literales no se da restricción alguna. Se omite así el caso por ejemplo para utilizar la propiedad en $-3 \cdot \sqrt[4]{16}$ que corresponde a -6 , pero si se ocupa la técnica resulta 6.

Se estudia a continuación el Tercer teorema de raíces, en la Actividad 36. Se trata de la “División de raíces de igual índice”. El desarrollo es el siguiente: Como se ve, es tarea del lector dar los fundamentos de cada paso,

Analice el siguiente desarrollo y fundamente cada uno de los pasos

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}}$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Tercer teorema sobre raíces

pero no se le pide que coloque las restricciones a los literales, lo que produciría errores por ejemplo al tomar a y b negativos y n par, por ejemplo.

Si es correcto que la demostración se basa en propiedades de las potencias de exponente entero, lo que es coherente desde la secuencia lógica, sin embargo, para hacer $a = (\sqrt[n]{a})^n$, necesariamente debe tomarse $a \geq 0$, idem para b , que además por ser denominador, se debe considerar $b > 0$.

Los ejercicios que propone (15 en total) de tipo instrumental para adquirir la técnica, no presentan números con los que se tenga la dificultad mencionada y en los de carácter literal, no se dan campos de validez, como ha sido la tónica en el texto. Estos peligros atentan contra la generalización que hacen los estudiantes, pero también los profesores que siguen los libros de texto por la credibilidad que le acreditan.

La Actividad 37 presenta el “Cuarto teorema sobre raíces”, el que se refiere al cambio de representación de un radical por la amplificación o simplificación de su exponente en la versión de potencia. Aunque el texto no despliega aún esta relación (que se verá más adelante), utiliza correctamente la definición de raíz n -ésima principal para demostrar el teorema. Éste es su desarrollo:

Por definición de raíz sabemos que:

1) $\sqrt[p]{a} = x \Leftrightarrow a = x^p$

Por elevación de potencia a potencia y elevando a r esta última igualdad, se tiene:

$$a^r = (x^p)^r$$

luego:

$$a^r = x^{pr}$$

Entonces, si $x^{pr} = a^r \Leftrightarrow \sqrt[pr]{a^r} = x$ (ii)

$\sqrt[p]{a} = \sqrt[pr]{a^r}$

Cuarto teorema sobre raíces

Este teorema nos permitirá amplificar o simplificar el índice de una raíz con el exponente del radicando.

Nuevamente no se describe el ámbito numérico en el que se está trabajando. Como en este texto se opta por ampliar el significado de $\sqrt[n]{a}$ para $a < 0$ (p.77), de modo que dicha expresión esté definida en todo \mathbb{R} , el descuido de las restricciones proporciona el error que indica Martínón (1990): $-2 = \sqrt[3]{-8}$, y utilizando este cuarto teorema sobre raíces, para $r = 2$ se tiene: $-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3 \cdot 2]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Al respecto, si en la matemática escolar se restringiera el uso de esta propiedad al uso de radicandos positivos, la propiedad estaría correctamente enunciada, pero esta alcanza gran complejidad cuando se toma la opción de extenderla a radicandos negativos, pues en realidad, para $a < 0$ se tiene n impar se tiene:

$$\begin{cases} \sqrt[p]{a} = -\sqrt[pr]{a^r} & \text{si } r \text{ es par} \\ \sqrt[p]{a} = \sqrt[pr]{a^r} & \text{si } r \text{ es impar} \end{cases}$$

Una lista de 18 ejercicios instrumentales y sin restricciones ni con situaciones problematizadoras se desarrollan en la sección de práctica que ofrece el libro de texto

para adiestrarse con el teorema. Curiosamente, 18 de los 20 sólo utilizan literales, mientras que sólo 2 son numéricos con radicandos positivos, por tanto, en estos ejercicios propuestos permanece oculta la posibilidad que aflore el error citado.

Avanzando se llega al “Quinto teorema sobre raíces”, conocido como raíz de una raíz:

Considere la expresión $\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}$

1) Si $s = \sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} \iff s^x = \sqrt[y]{a}$

Por consiguiente: $s^x = \sqrt[y]{a} \iff (s^x)^y = a$

Esta última igualdad queda

$$s^{xy} = a$$

y $s^{xy} = a \iff s = \sqrt[xy]{a}$ ii)

De i) y ii) se puede concluir

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$$

Quinto teorema sobre raíces

La demostración no posee errores lógicos, pues está instalada sobre la definición y el uso de propiedades de las potencias de exponente entero, perfectamente demostrables con independencia de esta propiedad. El teorema está incompleto como los anteriores. No señala que $a \geq 0$, de modo que no dependa de la elección de los índices involucrados, pues forzando una extensión para radicandos negativos, se tendría el caso muy particular que exigiría que todos los índices sean impares.

Examinando los ejercicios propuestos, se observa que la mitad (5 de 10) son numéricos y la otra mitad con sólo literales como radicandos. No se da el caso en que

aparezcan cantidades subradicales negativas, ni tampoco se dan restricciones para los literales.

Para cerrar este campo, entramos en la Actividad 39 que se titula “Potencias de base real positiva y exponente racional”. Comienza desarrollando la idea de dotar de significado a la expresión $a^{\frac{p}{q}}$, señalando que $a \in \mathbb{R}$ y que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, para lo cual supone que la propiedad $(x^m)^n = x^{mn}$ se cumple para todo x real y para cualquier m y n en \mathbb{Q} . Así continúa:

Consideremos primero la potencia:

$$\boxed{\frac{1}{a^p}}$$

, en que $a \in \mathbb{R}^+$ y $p \in \mathbb{N}$

En consecuencia:

$$\left(\frac{1}{a^p}\right)^p = \frac{1}{a^p} \quad (\text{por la propiedad exigida}) \quad (**)$$

Luego, i)

$$\left(\frac{1}{a^p}\right)^p = a$$

Sea, $\frac{1}{a^p} = x$

Reemplazando en i)

$$x^p = a \quad \text{esto es equivalente a} \quad x = \sqrt[p]{a}$$

Al reemplazar $x = \frac{1}{a^p}$ nos queda:

$$\boxed{\frac{1}{a^p} = \sqrt[p]{a}} \quad \text{ii)}$$

La secuenciación es correcta bajo la exigencia que hace en suponer que una propiedad probada para exponentes enteros, puede extenderse a exponentes racionales

(en rigor, racionales no enteros, para que se pueda indicar el significado del exponente racional).

La línea marcada con (**) no proviene de una ecuación sino del desarrollo del lado izquierdo al aplicar la propiedad supuesta. A diferencia del resto de los tratamientos de las propiedades de los radicales, los autores si explicitan las restricciones. La exposición sigue con la dotación de significado para $a^{\frac{p}{q}}$, a partir de $a^{\frac{1}{q}}$ utilizando nuevamente que se cumpla la propiedad $(x^m)^n = x^{mn}$ para todo x real y para cualquier

m y n en \mathbb{Q} , haciendo $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}}$. Luego demuestra que la propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

se satisface para exponentes racionales tomando $n = \frac{p}{q}$ y $m = \frac{r}{s}$, en correcta secuenciación lógica y así da como tarea al lector que realice las demostraciones del resto de las propiedades enunciadas en el capítulo anterior donde trató las que se refieren a exponente entero.

Finaliza esta exposición con una serie de 15 ejercicios en que sólo utiliza bases numéricas positivas y cuando usa literales, no se da indicación alguna de su naturaleza.

Hemos visto que este texto se caracteriza por dar demostraciones que si bien son lógicamente válidas, no informa de los campos de validez de las variables involucradas y en los listados de ejercicios mayormente rutinarios, se omiten las posibilidades de que los lectores se encuentren con las situaciones de cuidado que llevan a error por la omisión de las restricciones respectivas en cada una de las propiedades que se aplican para desarrollarlos.

- **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

La única aplicación en el ambiente algebraico, es la racionalización de denominadores que aparece como una aplicación de su actividad 35 en que anuncia su “Segundo teorema sobre raíces” en el que ilustra la propiedad ($\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$).

En el breve tratamiento de la racionalización que casi alcanza las dos planas, se trabajan las tres técnicas más frecuentes para racionalizar el denominador, pero en todo este desarrollo no hay referencia alguna acerca del significado de este concepto, como tampoco de la necesidad de estudiarlo.

La presentación de la racionalización es puramente expositiva. Se le da al lector el caso modelo y luego es resuelto paso a paso en el texto, luego de la instrucción para el lector “Estudie los siguientes ejemplos”, que más que estudiar, en realidad es algo así como “vea esto y repítalo”. Extraemos una sección de este desarrollo sólo como evidencia:

Estudie los siguientes ejemplos:

i) $\boxed{\frac{x}{\sqrt{y}}}$; en este caso se amplifica por \sqrt{y} para que en el denominador quede $\sqrt{y^2}$

Así se obtiene: $\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{y^2}} = \frac{x\sqrt{y}}{y}$

ii) $\boxed{\frac{2a}{\sqrt[3]{a}}}$; en este caso se amplifica por $\sqrt[3]{a^2}$ para que el denominador se transforme en $\sqrt[3]{a^3}$

Así se obtiene: $\frac{2a}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2a \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{2a \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{2a \sqrt[3]{a^2}}{a} = 2 \sqrt[3]{a^2}$

No hay uso de restricciones para los literales involucrados ni actividad relativa a su búsqueda.

Desarrolla un ejemplo con literales como para dar el patrón a seguir y luego en efecto lo reproduce con números y con otro caso con letras. No se da lugar a las restricciones. Viene así una colección de 10 ejercicios propuestos, para aplicar la misma regla dada. No hay en este caso reversibilidad que permita extraer una potencia de un radical.

5.3. Síntesis del capítulo. Resultados locales.

Como balance de este capítulo, presentaré en primer lugar la matriz de resumen y cotejo (Mr) para determinar el Perfil del Saber a Enseñar propuesto en los libros de texto de este período. Luego enfatizaré algunos elementos para la reflexión como lo son los sistemas de Representación utilizados, algunos fenómenos didácticos acaecidos, los tipos de actividades propuestas: Ejercicios, problemas, demostraciones, y los errores (conceptuales, procedimentales, entre otros) que emerjan.

Tabla 5.9. Matriz de resumen y cotejo aplicada a los libros de texto período 1969 – 1981

Campos, aspectos y sub – aspectos		Período 1969 - 1981					
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Libro 5	Libro 6
1. Vigencia de la fuente		30	41	68	70	74	79
2. Nivel de enseñanza media		---	---	---	2°	---	2°
3. Uso del signo radical	1.1 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama raíces	X	X	X	X	X	X
	2.2 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama radicales		X				
	3.3 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama irracionales	X	X	X	X	X	
	3.4 Comete el error del doble signo (por ejemplo, $\sqrt{4} = \pm 2$)	X	X	X	X	X	
	3.5 Lo usa con restricciones sólo para el radicando (dominio)		X				
	3.6 Lo usa con restricciones de dominio y recorrido						X
4. Introducción al concepto	4.1 Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)	X	X	X	X	X	X
	4.2 Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)						
	4.3 Como inversa de la potenciación	X	X	X	X	X	X
	4.4 Como potencia de exponente fraccionario (o racional)		X		X		
	4.5 Otro (especificar al final de la parrilla)						
5. Tipos de representaciones	5.1 Con el signo radical	X	X	X	X	X	X
	5.2 Con uso de valor absoluto						
	5.3 Con notación de potencia (exp. fraccionario)	X	X	X	X	X	X
	5.4 Notación funcional						
	5.5 Otro (especificar a continuación de la parrilla)						
6. Propiedad	6.1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	6.1.1 La demuestra con errores lógicos	X		X	X	X
		6.1.2 La demuestra correctamente					
		6.1.3 No demuestra		X			

		6.1.4 Usa restricciones completas						
		6.1.5 Usa restricciones incompletas						
		6.1.6 No restringe	X	X	X	X	X	X
		6.1.7 Define unilateralmente						
		6.1.8 Define bilateralmente	X	X	X	X	X	X
	6.2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	6.2.1 La muestra con errores lógicos		X	X	X	X	
		6.2.2 La muestra correctamente	X					X
		6.2.3 No muestra						
		6.2.4 Usa restricciones completas						
		6.2.5 Usa restricciones incompletas						
		6.2.6 No restringe	X	X	X	X	X	X
		6.2.7 Define unilateralmente	X	X	X	X	X	X
		6.2.8 Define bilateralmente						
	6.3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	6.3.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI	X	X	X	NI
		6.3.2 La muestra correctamente	NI	NI				NI
		6.3.3 No muestra	NI	NI				NI
		6.3.4 Usa restricciones completas	NI	NI				NI
		6.3.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI				NI
		6.3.6 No restringe	NI	NI	X	X	X	NI
		6.3.7 Define unilateralmente	NI	NI				NI
		6.3.8 Define bilateralmente	NI	NI	X	X	X	NI
	6.4. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a : b}$	6.4.1 La muestra con errores lógicos			X	X	X	
		6.4.2 La muestra correctamente	X	X				X
		6.4.3 No muestra						
		6.4.4 Usa restricciones completas						
		6.4.5 Usa restricciones incompletas						
		6.4.6 No restringe	X	X	X	X	X	X
		6.4.7 Define unilateralmente	X	X	X	X	X	X
6.4.8 Define bilateralmente								
6.5. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$	6.5.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI		X		NI	
	6.5.2 La muestra correctamente	NI	NI				NI	
	6.5.3 No muestra	NI	NI	X		X	NI	
	6.5.4 Usa restricciones completas	NI	NI				NI	
	6.5.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI				NI	
	6.5.6 No restringe	NI	NI	X	X	X	NI	
	6.5.7 Define unilateralmente	NI	NI				NI	
	6.5.8 Define bilateralmente	NI	NI	X	X	X	NI	
6.6. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	6.6.1 La muestra con errores lógicos	X	X	X	X	X		
	6.6.2 La muestra correctamente						X	
	6.6.3 No muestra							
	6.6.4 Usa restricciones completas							
	6.6.5 Usa restricciones incompletas							

7. Aplicaciones de los radicales	6.7. $\sqrt[n]{a^n} = a$	6.6.6 No restringe	X	X	X	X	X	X
		6.6.7 Define unilateralmente						
		6.6.8 Define bilateralmente	X	X	X	X	X	X
		6.7.1 La demuestra con errores lógicos	X		X	X	X	X
		6.7.2 La demuestra correctamente						
		6.7.3 No demuestra		X				
		6.7.4 Usa restricciones completas						
		6.7.5 Usa restricciones incompletas						
		6.7.6 No restringe	X	X	X	X	X	X
	6.7.7 Define unilateralmente							
	6.7.8 Define bilateralmente	X	X	X	X	X	X	
	6.8. $(\sqrt[n]{a})^n = a$	6.8.1 La demuestra con errores lógicos	X		X	X	X	X
		6.8.2 La demuestra correctamente						
		6.8.3 No demuestra		X				
		6.8.4 Usa restricciones completas						
		6.8.5 Usa restricciones incompletas						
		6.8.6 No restringe	X	X	X	X	X	X
		6.8.7 Define unilateralmente						
		6.8.8 Define bilateralmente	X	X	X	X	X	X
	6.9. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	6.9.1 La demuestra con errores lógicos		X				
		6.9.2 La demuestra correctamente			X		X	X
		6.9.3 No demuestra	X			X		
		6.9.4 Usa restricciones completas						
		6.9.5 Usa restricciones incompletas						
		6.9.6 No restringe	X	X	X	X	X	X
		6.9.7 Define unilateralmente						
		6.9.8 Define bilateralmente	X	X	X	X	X	X
	7.1 Racionalización	7.1.1 Sólo de denominadores	X	X	X	X	X	X
		7.1.2 De numeradores y denominadores						
		7.1.3 Restringe						
7.2 Ecuaciones cuadráticas		7.2.1 Conduce al error $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a} = \pm b$			X		X	NI
		7.2.2 Establece correctamente que $x^2 = a$, entonces, $x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$	X	X		X		NI
		7.2.3 Restringe						NI
		7.3 Ecuaciones con radicales	7.3.1 Explica sobre transformaciones algebraicas no equivalentes	X			X	
7.3.2 Comprueba las soluciones y selecciona sólo las que corresponden			X	X		X		NI
7.3.3 Comprueba las soluciones y las separa en soluciones y soluciones ajenas				X				NI

	7.3.4 Estudia las restricciones antes de resolver				X		NI
7.4 Números Complejos	7.4.1 Trasciende el error del doble signo	X		NI		NI	NI
	7.4.2 Admite la notación con el radical sólo para la raíz real no negativa		X	NI	X	NI	NI
7.5 Teorema de Pitágoras							NI
7.6 Irracionalidad		X	X	X	X	X	NI

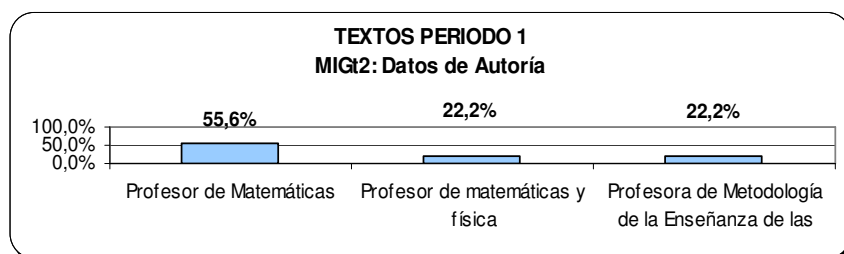
Perfil del Saber a Enseñar primer período

Con la información de la matriz Mr anterior, intentaré construir el Perfil del Saber a Enseñar en el primer período. Para tal propósito se han organizado los datos en la siguiente tabla, en la cual se ha seleccionado de la matriz de resumen las tendencias de los datos. Cabe recordar que el Perfil de esta forma se escoge por medio de los campos con sus respectivos aspectos y sub – aspectos que aparecen con mayor frecuencia, como también se destaca lo que no ocurre, como el complemento de lo que sí se da pero en un porcentaje de corte menor al 50%.

Algunos elementos notables de los datos de identificación de muestra son los siguientes:

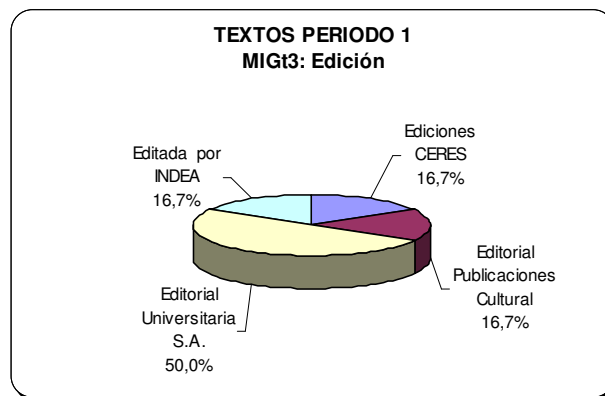
1. En este período uno de los libros es extranjero, el resto todos nacionales. Además sólo dos de los seis son libros de texto dirigidos al 2° año de educación media y los otros cuatro son compendios de álgebra.

2. Los autores de la época son en su mayoría profesores sin especializaciones post-graduales.



2. No hay para este período libros de texto distribuidos por el gobierno, todos son de venta particular.

3. Se destaca una participación de varias editoriales hoy inexistentes, a excepción de Editorial Universitaria a la que le corresponde la notable posición de la mitad de los libros de mayor uso en la época.



4. En la presentación de contenidos todos los libros cuentan una estructura *axiomática* y sus actividades son de tipo *mecanicista*, coherente con el paradigma predominante de la reforma de las matemáticas modernas.

5. Los compendios se diferencian de los textos dirigidos a 2° medio, en que estos últimos enfocan las temáticas desde el estructuralismo propiciado por la reforma de las matemáticas modernas, sin embargo se asemejan en el tipo de actividades, situadas en un plano instrumental – operativo (Labarrere y Quintanilla, 2006) en su mayoría.

Entrando en detalle del contenido del álgebra de radicales y con las tendencias marcadas por las cifras en obtenidas a partir de la matriz de resumen y cotejo (Mr), se ha organizado los resultados en la siguiente tabla:

Tabla 5.10. Perfil de Saber a enseñar en el primer período.

Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces	100
	No se utiliza el nombre de radical	84
	No utiliza el nombre de irracional	84
	Se presenta el error del doble signo.	100
	No Restringe completamente.	84

4. Introducción al concepto	Planteamiento Deductivo.	86
	Introduce el concepto como inversa de la potenciación. No aparece la introducción como potencia de exponente fraccionario	100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical	66
	No utiliza el valor absoluto Utiliza la notación de potencia No representa como función	100 100 100
6. Propiedades de los radicales	6.1 La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$ es tratada	100
	- La demuestra incorrectamente	100
	- No restringe	100
	- Enuncia bilateralmente	100
	6.2 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ si es tratada	100
	- La demuestra incorrectamente	66
	- No restringe	100
	- Enuncia unilateralmente	100
	6.3 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$ es tratada	50
	- La demuestra incorrectamente	100
	- No restringe	100
	- Enuncia bilateralmente	100
	6.4 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ es tratada	50
	- La demuestra correctamente	100
	- La demuestra incorrectamente	66
	- No restringe	100
	- Enuncia unilateralmente	100
6.5 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$ no es tratada	50	
6.6 La propiedad $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$ es tratada	66	
- No la demuestra	100	
- No restringe	100	
- Enuncia bilateralmente	100	
6.7 La propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$ es tratada	100	
- La demuestra incorrectamente	84	
- No restringe	100	
- Enuncia bilateralmente	100	
6.8 La propiedad $(\sqrt[n]{a})^n = a$ es tratada	100	
- No la demuestra	50	
- Restringe completamente	100	
- Enuncia unilateralmente	100	
6.9 La propiedad $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ es tratada	100	
- La demuestra correctamente	100	
- No restringe	100	
- Enuncia bilateralmente	100	

7. Aplicaciones de los radicales	7.1	La Racionalización es tratada	100
		- Sólo de denominadores	100
		- No restringe	100
	7.2	Las Ecuaciones cuadráticas son tratadas	100
		- Resolución correcta	100
		- No restringe.	84
	7.3	Las Ecuaciones con radicales no son tratadas	50
	7.4	Números Complejos son tratados	71
		- No trasciende el error del doble signo	71
		- Admite la notación con el radical sólo para la raíz no negativa.	71
	7.5	No Incorpora el Teorema de Pitágoras.	84
	7.6	Incorpora el problema de la Irracionalidad.	66

El Perfil organizado en la tabla anterior representará al Saber a Enseñar propuesto por los libros de texto utilizados mayormente entre 1969 y 1981, frente a los dos Perfiles respectivos de los otros dos períodos. En el capítulo 8 se procederá a triangular los tres perfiles para elaborar la Caracterización del Saber a Enseñar de los libros de texto entre 1969 y 2009.

Para reforzar el Perfil de esta primera etapa, incorporaré a continuación otros resultados que se deben destacar:

1. La tendencia marca que se emplea el concepto de raíz y también el de irracional para identificar expresiones denotadas con el signo radical y el error del doble signo es predominante.
2. No se suelen explicitar los campos de validez de las propiedades.
3. El tratamiento es Deductivo en toda la muestra y se introduce el concepto de raíz como operación inversa de la potenciación.
4. Sólo se trabaja con dos tipos de representaciones: con el signo radical y con la forma de potencia $a^{\frac{p}{q}}$.
5. Las propiedades de los radicales para multiplicar y dividir cuando tienen distinto índice, es tratada sólo por la mitad de la cantidad de libros del período.
6. Emergen fenómenos como los siguientes:

- a) La divulgación unilateral de las propiedades de multiplicación y división de radicales de igual índice. Todos los libros de texto muestran este hecho, lo que manifiesta una concepción del signo igual como “resultado de”, visión aritmética pero carente del significado algebraico.
- b) El tratamiento de la racionalización se da sólo para el denominador en circunstancias que también puede aplicarse al numerador y entonces servir como método de comprobación.
- c) Existencia de incoherencias o rupturas internas en el discurso escrito del libro de texto. Sucede esto con los libros 4a y 5a de este período. El caso de 4a, levanta todo un discurso en que hace por ejemplo $\sqrt{4} = \pm 2$ y luego presenta el concepto de “raíz principal” definiéndola como $p = \sqrt[n]{a}$. La contradicción se descubre cuando entonces se pregunta ¿Cuál es la raíz cuadrada principal de 4?. Siguiendo la definición debe ser $\sqrt{4}$ pero por lo de antes, debiera escogerse el valor positivo, pero entonces dos comentarios surgen acá:
 ¿Qué representará para los autores la expresión $-\sqrt{4}$?. No es posible indagar más allá, pero es clara la confusión conceptual que dejan entrever.

Hay dos libros más 3a y 5a que por ser del mismo autor, me referiré como a uno sólo.

En los momentos que expone “raíces” convencidamente utiliza el signo radical y cae en el error del doble signo. De otro lado, cuando resuelve ecuaciones cuadráticas se presenta un hecho insólito: Las dos soluciones nacen directamente del signo radical y no de la igualdad que define el concepto de raíces de una ecuación, muy distinto por cierto de la raíz positiva de una ecuación con coeficientes en \mathbb{Q} .

7. Las demostraciones conforman un elemento clave y obligado, tal como lo indica el mandato ministerial de la época. La mayoría de las demostraciones no utilizan la definición de radical que dan sino hacen un cambio de notación a potencia que

es más restrictivo aún, pues la base de esa potencia debe ser positiva para que pueda leerse también por medio de la función exponencial.

8. Creación de Actividades las cuales carecen de significado en la matemática pura, pero se inventan situaciones entonces no vinculadas al saber de referencia. Concretamente los manuales 3a y 5a incurren ejercicios que ni siquiera merecen la atención. La creación por ejemplo de $^{-1.5}\sqrt{-8}$ que no tiene sentido matemático.

En el capítulo siguiente, se presentará la descripción y análisis para los libros de texto de segundo período que va de 1982 a 2000 y se procederá al final, tal como se ha hecho aquí, a elaborar el perfil respectivo.

CAPITULO 6

Análisis de los libros de texto del Período 1982 – 2000.

6.1. Introducción.

En este capítulo se desarrolla la revisión de los siete libros de texto pertenecientes a la muestra intencionada del segundo período que se inicia en el año 1982, poniéndose en marcha los programas oficiales para el tercer año de enseñanza media según el artículo 16° del Decreto N°300, y cuyo término se ha contemplado para el año 2000, pues aparece luego el nuevo decreto N°220 que modifica los planes y programas.

Se aplicaron las matrices MIGt y MACt a cada uno de los siete textos que fijamos en este período, para orientar la revisión y análisis (histórico – crítico y de contenido), la que se sintetiza en la matriz de resumen Mr en el balance de cierre de este capítulo.

6.2. Aplicación de las matrices a los libros de texto.

Los siete libros de texto que se examinarán en este capítulo son:

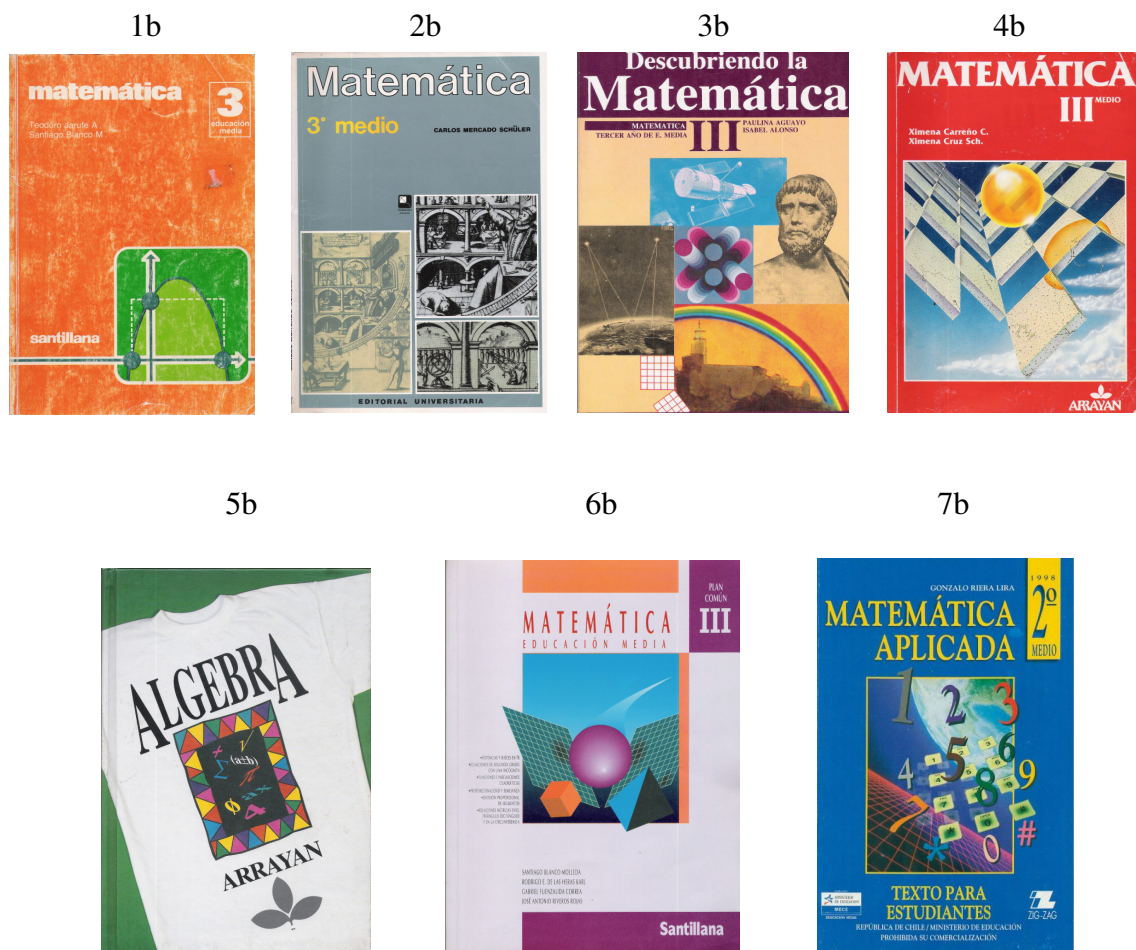
Tabla 6.1. Libros de texto examinados del período 1982 – 2000

	Año	Edición	Título	Editorial
1b	1983	1	Matemática 3	Santillana
2b	1984	2	Matemática 3° medio	Editorial Universitaria
3b	1985	1	Descubriendo la Matemática III	Salesiana
4b	1989	1	Matemática 3° medio	Arrayán
5b	1993	1	Álgebra	Arrayán
6b	1994	1	Matemática III	Santillana
7b	1997	1	Matemática 2° medio	Zigzag

El último libro (n°7), se ha incluido por la gran masificación de los cuatro libros licitados por el MINEDUC y distribuidos gratuitamente a los establecimientos de dependencia municipal y particular subvencionado, en una época de transición de los

programas. Por tal motivo, se da una suerte de desajuste entre los tomos de 1° a 4° medio y los programas que dejaban de utilizarse por una parte y los comenzaban a ser utilizados por otra. Los libros de este autor no fueron ampliamente utilizados, sin embargo, existe un gran número de ellos ya en el mercado informal o abandonados en las bibliotecas de los colegios. Se caracterizaron además por ser poco portables, pues poseían una gran cantidad tanto de páginas como de temas, pareciendo más un compendio que el formato habitual de los libros de texto por niveles.

Cuyas portadas se presentan a continuación:



6.2.1.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 1b.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El dispositivo se denomina “Matemática 3° Educación Media”. Es un libro nacional, cuya segunda edición se terminó de imprimir en 1987, y su distribución es de carácter comercial.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

El equipo de autoría se conforma de dos autores. La única información disponible es la que se refiere a sus grados académicos junto a las instituciones que se los otorgó y en las que trabajaron.

Autores:

- Autor 1: Profesor de Estado en Matemática y Física, Título obtenido en la Universidad de Chile. Magíster en Educación otorgado por la Universidad Católica de Chile. Profesor de Metodología Enseñanza de la Matemática, Escuela Educación, Universidad Católica de Chile. Fue Rector del Colegio Árabe de Santiago entre los años 1983 y 1987. Además de contar con numerosas publicaciones, cuenta con un reconocido prestigio en los colegios y liceos de Chile por sus reconocidos textos de enseñanza básica y media en las áreas de matemáticas y física y de manuales de metodología de enseñanza para docentes del área.
- Autor 2: Profesor de Estado en Matemática, Título obtenido en la Universidad Católica de Chile. Consejero Educacional y Vocacional, Universidad Católica de Chile.

Como se puede apreciar, ambos autores son profesores de matemáticas, donde uno de ellos trabaja en formación de profesores. Es especialmente importante examinar

autores con estas características, pues indica que hay varios docentes hoy en día que fueron formados por el primer autor, de modo que su epístome, no sólo queda plasmada en el libro de texto, sino también en los estudiantes de pedagogía en matemáticas que formó.

• **MIGt3: Edición y tipo de obra.**

La obra, corresponde a un libro de texto para el nivel de 3° año de enseñanza media. Pertenece a la Editorial Santillana del Pacífico, S. A. de ediciones. Su distribución es de carácter comercial en todo el país. Impreso en Chile por Editorial Lord Cochrane, S.A. La edición revisada es la n° 1, que se terminó de imprimir en 1983. Se desconoce el mes.

• **MIGt4: Presentación física.**

El libro contiene 208 páginas beige con impresión a color (negro y naranja) y cuyo tamaño es de 18 cm x 26,5 cm.

6.2.1.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 1b.

• **MACt1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en cuatro Unidades como se indica en la siguiente tabla:

Tabla 6.2. Organización temática del texto 1b.

Unidad	Nombre	Descripción
1	Raíces y Ecuación de segundo grado	Se inicia con Potencias que van del exponente natural al racional, luego las propiedades de las Potencias, e interés simple a modo de aplicación. A continuación introduce el concepto de radical, (del n-ésimo al cuadrado), luego analiza propiedades y trabaja con la racionalización de denominadores e Interés compuesto. Estudia la ecuación de segundo grado. Expone la función cuadrática y su representación para señalar intersección con los ejes coordenados, concavidad,

		y vértice (para indicar máximos y mínimos), dominio y recorrido y finaliza con Inecuaciones de segundo grado.
2	Proporcionalidad y Semejanza	Comienza trabajando con comparación de trazos. Semejanza de Polígonos de lo general a lo particular. Segmentos proporcionales entre paralelas, Teorema particular y general de Thales de Mileto. División interior y exterior de un trazo. Relaciones Métricas en el triángulo rectángulo, Teorema de Euclides. Teorema de Pitágoras. Razones Trigonométricas en el triángulo rectángulo. Relaciones métricas en la circunferencia. División de un trazo en sección áurea o divina.

Al final del libro hay una serie de ejercicios con alternativas, denominados por los autores “Ejercicios y problemas de integración”, entregando la alternativa correcta, en una página anexa, al cuál llaman solucionario.

Este libro de texto se ajusta completamente al programa ministerial.

• **MACT2: Tipo de Presentación.**

El texto presenta una estructura tipo Axiomática y las actividades que presenta se ajustan al estilo Mecanicista. El texto comienza con definiciones, y empleando sólo la definición dada por los autores inicialmente de potencias de base real y exponente de la forma $\frac{m}{n}$, generaliza las propiedades realizando una demostración con sus respectivas restricciones, estableciendo de esta única forma el ponerse de acuerdo con la notación que exponen. Luego presentan una serie de ejemplos clasificados bilateralmente, en cada una de las propiedades, para continuar con una serie de ejercicios por grupos de propiedades, donde los estudiantes deben seguir la lectura que se supone les indica cómo se hacen los ejercicios propuestos, con una metodología instruccional y única, que pretende la práctica instrumental de lo aprendido. Se cataloga entonces con el par (A,M) = (axiomático, mecanicista).

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Es en la primera unidad “Raíces y ecuaciones de segundo grado”, donde aparecen los radicales como objeto de estudio, donde se le destinan 28 de las 208

páginas del texto, esto es, aproximadamente la séptima parte del libro, equivalente al 13,46%.

Los radicales son introducidos en esta Unidad, desarrollada bajo la siguiente organización:

- Contenidos Unidad Raíces y ecuaciones de segundo grado:

1) Potencias.

1.1) Concepto.

- Signo de una potencia.

1.2) Propiedades.

- Potencia de base real y exponente natural.
- Potencia de base real y exponente entero.
- Potencia de base real y exponente racional.

1.3) Aplicación.

- Fórmula de interés compuesto.

2) Raíces.

2.1) Concepto.

- Raíz principal o aritmética.

2.2) Propiedades.

2.3) Racionalización de denominadores.

- Racionalización de expresiones de la forma $\frac{A}{\sqrt{a}}$.
- Racionalización de expresiones de la forma $\frac{A}{\sqrt[n]{a}}$.
- Racionalización de expresiones de la forma $\frac{A}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}}$.
- Racionalización de expresiones de la forma $\frac{A}{\sqrt{a \pm \sqrt{b \pm \sqrt{c}}}}$.

2.4) Aplicación.

- Tasa de interés compuesto.
- 3) Ecuación de segundo grado.
- 3.1) Concepto.
- Tipos de ecuaciones de segundo grado.
- 3.2) Resolución de la ecuación de segundo grado.
- Completación del trinomio cuadrado perfecto.
 - Ecuaciones cuadráticas incompletas.
 - Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
 - Ecuaciones cuadráticas con coeficientes fraccionarios.
 - Ecuaciones cuadráticas con incógnita en el denominador.
 - Ecuaciones cuadráticas literales.
 - Problemas que se resuelven mediante ecuaciones cuadráticas.
- 3.3) Propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática.
- Factorización del trinomio ax^2+bx+c .
- 3.4) Ecuaciones que se transforman a segundo grado.
- Ecuaciones irracionales.
 - Ecuaciones bicuadradas.

Los radicales aparecen también en otra unidad, como herramienta a utilizar, pero en otro ámbito, como por ejemplo, en el empleo de expresiones cuadráticas, en el tratamiento del Teoremas de Euclides y Pitágoras, como en la aplicación de la Sección Áurea.

En el terreno propiamente algebraico el análisis se concentra en las temáticas 1.2., 2.1. y 2.2., junto a las aplicaciones que están en 2.3. y partes del tema 3).

- **MACT4: Presentación de los Radicales.**

La presentación de los radicales se comprende mejor al mirar la secuencia de temas desarrollados, los que son especificados a continuación:

Contenidos de la Unidad Raíces y ecuaciones de segundo grado:

1) Potencias.

Lo que los autores realizan, en esta parte del texto, es la presentación en forma secuencial de las propiedades de potencias, comenzando con las potencia de base real y exponente natural, continuando con aquellas potencias de base real y exponente entero, para terminar con las de exponente racional. La intención que entregan los autores acerca de este tema es dar un paso más en la generalización de la idea de potencia, encontrando según ellos, un sentido a aquellas potencias de exponentes racionales, partiendo por los exponentes de la forma $\frac{1}{n}$, planteando un ejemplo con el que concluye lo siguiente:

una potencia de exponente $\frac{1}{2}$ equivale a la raíz cuadrada de la base respectiva.

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

Generalizando, concluye que:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \geq 0 \text{ si } n \text{ es par})$$

Conviene destacar que si $a < 0$ y n es par, entonces, $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

Después de una gama de ejemplos y ejercicios, continúan el estudio con aquellas potencias de base real y exponente de la forma $\frac{m}{n}$, de las cuales realizando una analogía del caso anterior, generaliza, asegurando lo siguiente:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Luego de presentar una gama de ejemplos, señalan que “es importante destacar que esta propiedad referida a exponentes de la forma $\frac{m}{n}$, es de gran importancia para el estudio de la raíces, ya que permite expresar una raíz en forma de potencia”.

Después de algunos ejercicios, presenta un cuadro resumen de las propiedades de las potencias, finalizando esta parte de la unidad con una aplicación, aportada por el trabajo del cálculo del interés compuesto.

Es importante destacar que el hablar de exponentes racionales, no necesariamente nos lleva a pensar en exponentes racionales **no enteros**, puesto que hablar de racionales sin esta distinción contradice la génesis de \mathbb{Q} como superconjunto de \mathbb{Z} . Pues bien, otro punto a considerar, es suponer, que se cumplen las mismas propiedades de las potencias de exponente entero, para las de exponente racional no entero.

En su presentación tampoco da espacio a una mayor explicación de porqué la expresión $\sqrt[n]{a}$ no es un número real para n par y $a < 0$. Se presenta un concepto (el de potencia de exponente racional) en una secuencia poco adecuada, pues no se ha partido del concepto de radical.

2) Raíces.

La presentación que realizan los autores acerca de los radicales, como objeto de estudio, se basa en el trabajo realizado en la sub-unidad anterior (potencias), además conceptualiza la radicación como una operación inversa de la potenciación.

La idea de raíz, ligada estrechamente a la de potencia, corresponde a una operación inversa de la **Potenciación**. Así, **dos** elevado al cubo da **ocho** y si al **ocho** se le aplica raíz cúbica, el resultado que se obtiene es **dos**.

$$2^3 = 8 \iff \sqrt[3]{8} = 2$$

Lo anterior muestra que $\sqrt[3]{8}$ es igual a dos, porque 2^3 es igual a 8. En general, se puede decir que la **raíz enésima** de **b** es, por definición, aquel número **x** que elevado al exponente **n** es igual a **b**.

$\sqrt[n]{b} = x \iff x^n = b$

$n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$

El símbolo $\sqrt{\quad}$ es el **operador** que caracteriza a la operación llamada **radicación**; **n** es el **índice** de la raíz y **b** es el **radicando** o **cantidad subradical**. No obstante que la definición se da para $n > 1$, por convención se considera que $\sqrt[n]{a} = a$. Además, el índice 2 se omite, o sea, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Después de unos ejemplos, generalizan unas equivalencias, con sus respectivas restricciones.

Ahora bien, recordando que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (propiedad 11 de las potencias), se puede establecer que:

$\sqrt[n]{a^n} = a$

o bien

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

 $a > 0$, si n es par.

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a \qquad (\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Estas ideas confirman que elevar a exponente n y sacar raíz enésima, son operaciones inversas.

En la propiedad de la izquierda si puede ocurrir que a sea negativo, no así en el recuadro de la derecha. En efecto, al asegurar que $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$, se está afirmando que la si se tiene $f(x) = \sqrt[n]{x}$ y $g(x) = x^n$, para cierto parámetro $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f \circ g = g \circ f$, lo que es falso, pues para n par se tiene como contraejemplo:

$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, en cambio, $(\sqrt{-2})^2$ no es un número real, y en efecto en \mathbb{C} corresponde a $(\sqrt{-2})^2 = (i\sqrt{2})^2 = 2i^2 = -2$. No es cierto por tanto, que $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$. La diferencia la dan los dominios de estas funciones. El tratamiento de estas propiedades tomadas como la misma, conforma una ruptura epistemológica de este saber transpuesto respecto del Saber Erudito de referencia.

Resumiendo de esta forma, que hay dos presentaciones de los radicales: Como potencia de exponente fraccionario y como una operación inversa de la potenciación. Esta última se encuentra con la dificultad conceptual que recién he expuesto. Por tal motivo, en el ambiente algebraico es inadecuado mostrar la potenciación y la radicación como operaciones inversas, pues lo son en el mundo aritmético y no en su paso al álgebra.

Interesante resulta ahora, lo que mostraremos en detalle lo que definen los autores, como raíz principal o aritmética y raíz secundaria.

• **Raíz principal o aritmética**

Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas: una positiva y otra negativa.

$$\sqrt{4} \begin{cases} \rightarrow +2, \text{ ya que } (+2)^2 = 4 \\ \rightarrow -2, \text{ ya que } (-2)^2 = 4 \end{cases}$$

Esta situación se presenta siempre que el radicando es positivo y el índice de la raíz es **par**.

$$\sqrt[4]{16} \begin{cases} \rightarrow +2, \text{ ya que } (+2)^4 = 16 \\ \rightarrow -2, \text{ ya que } (-2)^4 = 16 \end{cases}$$

En estos casos, la raíz **real positiva** constituye la **raíz aritmética o principal** del número dado. La raíz negativa se considera como **raíz secundaria**.

Ahora bien, si el radicando es positivo y el índice **impar**, existe una única raíz real que es positiva y se dice que es la **raíz principal o aritmética**.

$$\sqrt[3]{27} = 3 \quad (\text{En este caso "no sirve" el } -3)$$

En general, la expresión $\sqrt[n]{a}$, con **n par**, representa la raíz enésima **principal** (no negativa) de a. La raíz no positiva se escribe $-\sqrt[n]{a}$.

¿Qué sucede cuando el radicando es negativo? Se presentan dos situaciones: si el índice es **impar**, la única raíz real es **negativa** y constituye la raíz principal o aritmética.

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad \text{ya que } (-3)^3 = 27$$

En cambio, si el índice es **par**, la situación no tiene respuesta en el ámbito de los números **reales**.

$$\sqrt{-4} \dots \text{ no existe en } \mathbb{R}$$

Observa que $(+2)^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$; es decir, no existe un **número real** que elevado al cuadrado (o a cualquier exponente par) sea igual a un número negativo.

En general, la **raíz principal o aritmética** es la **raíz real positiva**, si el radicando es positivo; es la **raíz real negativa**, si el radicando es negativo y el índice impar.

Se observa claramente cómo cae en el error del doble signo, con la justificación espuria de la relación que acabo de criticar.

• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

El tratamiento de las propiedades comienza en la página 33 con la continuación de los temas que ya describimos en los campos anteriores (MACt3 y MACt4).

De aquí en adelante, tal cómo se señaló en el campo anterior (MACt4), trabajan las propiedades de radicales, con el supuesto de que se cumplen sólo para las raíces principales o aritméticas, apoyándose de la transformación de radical a potencia, justificando que los radicales se pueden escribir como potencias con exponentes fraccionarios, validando así, que las reglas de cálculo para potencias, valen también, no sólo para exponentes enteros, sino también para exponentes fraccionarios. Conocimiento impuesto al cuál los autores no invitan a verificar. Cada una de las propiedades es analizada bilateralmente.

El estudio de las propiedades de las raíces se facilita mucho al recordar las propiedades de las potencias. Basta para ello reiterar que una raíz se puede expresar en forma exponencial. En general, las propiedades se refieren a la raíz aritmética o principal.

Delicado resulta el resto de los tratamientos, pues su base está en la transformación (como declara) de la notación con el radical a la de potencia de exponente fraccionario.

Cabe destacar que una vez que demuestra una pro

Después que enuncia cada propiedad, entrega una serie de ejemplos, explicando que se cumple en ambos sentidos, para

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \\ &= (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{Prop. 5 de las potencias}) \\ &= \sqrt[n]{a \cdot b} \end{aligned}$$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ son números reales

luego después de un par de propiedades enunciadas, entrega ejercicios para que el alumno resuelva.

En la serie de actividades propuestas que aparece a continuación de cada propiedad, trabajan con radicales que contienen expresiones radicales numéricas de tipo irracional. Hay ejercicios con expresiones algebraicas en la cantidad subradical, sin ninguna restricción para ellas cuando están bajo un radical de orden par. El trabajo es netamente instrumental y no pone atención a las condiciones de validez de las expresiones.

19. $\sqrt{3x} + 3\sqrt{x} - \sqrt{3x} - 2\sqrt{x}$	20. $\sqrt{x}(1+\sqrt{x}) - 2(x+\sqrt{x})$
21. $(1+\sqrt{a})^2 + 2(3+\sqrt{a})$	22. $(1-\sqrt{x})^2 + (1+\sqrt{x})^2$
23. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$	24. $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 - 3(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$
25. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y}) - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$	26. $(1+\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 - (2+\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$

Estos ejercicios son de la página 39, como también lo podemos observar en cada serie de ejercicios de la unidad, en donde hay claras evidencias que no se especifican restricciones para los literales.

• **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

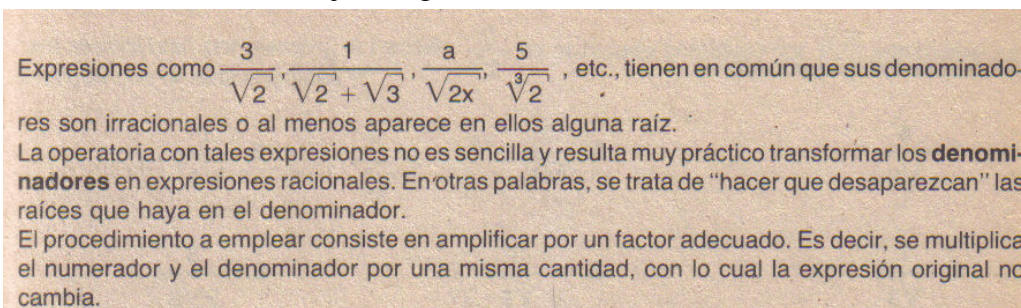
En este campo observaremos los contenidos que hacen que el objeto radical, pase ser una herramienta. Estos son: Racionalización y la ecuación cuadrática.

• Una primera aplicación del álgebra de radicales aparece en la página 49, en la institucionalización de un modelo de racionalización, denominados por los autores, como: “Racionalización de denominadores”, bajo la siguiente estructura.

- Racionalización de expresiones de la forma $\frac{A}{\sqrt{a}}$.
- Racionalización de expresiones de la forma $\frac{A}{\sqrt[n]{a}}$.

- Racionalización de expresiones de la forma $\frac{A}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}}$.
- Racionalización de expresiones de la forma $\frac{A}{\sqrt{a \pm \sqrt{b \pm \sqrt{c}}}}$.

Comienza el estudio, bajo la siguiente introducción:



Continúa el análisis dando a conocer metodología a emplear en cada uno de los casos mencionados anteriormente, explicando un ejemplo en detalle, luego se entregan otros ejemplos desarrollados, seguidos de una serie de ejercicios.

Llama la atención, que al racionalizar distintos tipos de expresiones, los autores cometan el error de no especificar restricciones para los literales utilizados. Por otra parte, sólo se habla de racionalizar denominadores en función de la operatoria, y muy penosamente indica que se debe hacer desaparecer el signo radical lo que suena a un acto de magia más que a una transformación algebraica, concepto del que tengo mis dudas, pues por lo general (y es fácil de comprobar empíricamente), los estudiantes y quizá algunos maestros vean la expresión $x^2 - y^2$ como resultado de $(x + y)(x - y)$ y no como una transformación algebraica, producto de la concepción que tengan del signo igual y del concepto de igualdad que sufre así como los conceptos de raíz y radical, un cambio en el pasaje de lo aritmético a lo algebraico.

- En una segunda aplicación tenemos la resolución de las ecuaciones de segundo grado. En la página 59, se presenta como sub - unidad, exponiendo distintos tipos de

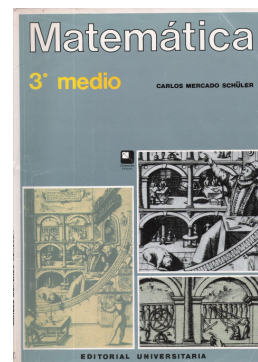
ecuaciones de esta índole, sin embargo a partir de la página 60, nos encontramos con el siguiente subtítulo “Resolución de la ecuación de segundo grado”, es aquí, donde los autores, explicitan el concepto de raíz como solución de una ecuación de segundo grado.

Por otra parte, en la resolución de ecuaciones, se trabaja con los métodos de completación de cuadrados, con la fórmula general y por factorización, evidenciándose una correcta resolución: $(\forall a \in R)(\forall b \in R) : ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

6.2.2.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 2b.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El dispositivo se denomina “Matemática 3° medio”. Es un libro nacional, declarado “Material Didáctico Auxiliar de la Educación Chilena por ORD. N° 05/51, del 14 de enero de 1985, del ministerio de Educación Pública.”, cuya primera edición se terminó de imprimir en marzo de 1985, y su distribución es de carácter comercial.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

La autoría de este libro de texto corresponde a un solo autor: es Miembro de la Real Academia de Farmacia de España; Miembro de la Academia de Ciencias Farmacéuticas de Chile; Miembro H. del Colegio Químico-Farmacéutico y Bioquímico de Chile; Miembro de la Junta Directiva de la Universidad de La Serena; Profesor de la Escuela Militar Bernardo O’Higgins; Profesor de la Facultad de Química y Farmacia U. de Chile; Profesor del Colegio Santa Úrsula; Ex Profesor de: Liceo de Aplicación; Liceo Federico Anisen; Escuela Superior de Correos y Telégrafos; Facultad de Filosofía y Educación U. de Chile; Instituto Luis Campino.

Según estos datos, se puede observar parte de la trayectoria que ha tenido el autor, hasta la fecha de dicha publicación, la cuál muestra una diversidad de ambientes educativos, la que le da un interés particular al tratamiento de los contenidos.

- **MIGt3: Edición y tipo de obra.**

Texto declarado Material Didáctico Auxiliar de la Educación Chilena por ORD. N° 05/51, del 14 de enero de 1985, del ministerio de Educación Pública, para el nivel de 3° año de enseñanza media. Su Distribución es de carácter comercial en todo el país. Impreso en Chile por la Editorial Universitaria. La edición revisada es la primera que se terminó de imprimir en Marzo de 1985.

- **MIGt4: Presentación física.**

El libro contiene 101 páginas blancas con impresión a color (negro y rojo), y cuyo tamaño es de 21 cm x 27 cm.

6.2.2.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 2b.

Este libro de texto comprende idéntico tratamiento que los libros de texto 3 y 5 del período anterior en cuanto a los campos MACt2, MACt3, MACt4, MACt5 y MACt6, ya que se trata del mismo autor y la misma editorial que lanzan el texto para tercer año medio tomando partes del compendio “Curso de Matemáticas elementales” de 1974 y de su versión anterior con ligeros cambios de 1968 y que ofrece exactamente el mismo discurso escrito respecto de la unidad I “Álgebra: Raíces y Ecuación de segundo grado” donde aparecen los radicales en su tratamiento como objeto de estudio. Por este motivo y para evitar la repetición, hemos escogido completar sólo el primer campo de la matriz MACt, por entregar información distinta sólo en este aspecto.

- **MACT1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en 4 Unidades.

Tabla 6.3. Organización temática del texto 2b.

Unidad	Nombre	Descripción
1	ÁLGEBRA: Raíces y Ecuación de segundo grado	Explora inductiva de los radicales (del cuadrado al n -ésimo), estudia la ecuación de segundo grado. Expone la función cuadrática y su representación para señalar Intersección con los ejes coordenados, concavidad, y vértice (para indicar máximos y mínimos).
2	GEOMETRÍA: Proporcionalidad y Semejanza	Comienza trabajando tipos de proporcionalidad y representación geométrica. Continúa con Proporcionalidad de trazos, teorema particular y general de Thales de Mileto. Construcción de la tercera y cuarta proporcional geométrica. División interior y exterior de un trazo. Teorema de Apolonio. Semejanza. Relaciones Métricas en el triángulo rectángulo y en el círculo. Teorema general y particular de Pitágoras. Teoremas de Euclides, finalizando con Teoremas sobre polígonos semejantes, y polígonos homotéticos.

Como he mencionado, la Unidad I de álgebra es parte del libro cinco analizado en el capítulo anterior, por tanto para el resto de los campos de la matriz MACT, se utilizará esa información y análisis para incluirlo en la síntesis de este período.

6.2.3.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 3b.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El dispositivo se denomina “Descubriendo la Matemática III”, texto para el estudiante. Es un libro nacional, cuya tercera edición se terminó de imprimir en marzo de 1989, y su distribución es de carácter comercial.



• MIGt2: Datos de Autoría.

El equipo de autoría se conforma de dos autores. La única información disponible es la que se refiere a sus grados académicos junto a las instituciones que se los otorgó.

Autores:

- Autor 1: Profesora de Estado en Matemática y Física, Título obtenido en la Universidad Católica de Chile.
- Autor 2: Profesora de Estado en Matemática y Física, Título obtenido en la Universidad Católica de Chile.

Según estos datos, se puede observar que el texto está producido o por lo menos firmado por dos matemáticos y físicos de profesión, lo que amerita un interés particular en la presentación de los contenidos.

• MIGt3: Edición y tipo de obra.

La obra, corresponde a un libro de texto para el nivel de 3° año de enseñanza media. Pertenece a la Editorial Salesiana, la que realiza su primer lanzamiento en el año 1985. Impreso en Chile por Salesianos, y su distribución es carácter comercial en todo el país. La edición revisada es la tercera que se terminó de imprimir en Marzo de 1989.

• MIGt4: Presentación física.

El libro contiene 233 páginas blancas con impresión a color y cuyo tamaño es de 18 cm x 26 cm.

6.2.3.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 3b.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en 4 Unidades.

Tabla 6.4. Organización temática del texto 3b.

Unidad	Nombre	Descripción
1	Potencias y Raíces	Comienza con una breve explicación notaciones en las que se utiliza la notación con potencias de 10, a continuación las propiedades de Potencias. A continuación introduce el concepto de radical (del cuadrado al n – ésimo). Luego analiza propiedades, y la “transformación de una expresión algebraica con raíces”.
2	Ecuaciones de segundo grado	Estudia la ecuación de segundo grado y expone la función cuadrática para representar lo obtenido con una ecuación cuadrática, analizando concavidad y vértice. Explica origen de “las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado”, luego trabaja con “la resolución de ecuaciones irracionales que se reducen a ecuaciones de segundo grado”.
3	Trazos Proporcionales	Comienza trabajando con comparación de trazos y trazos proporcionales entre paralelas, Teorema particular y general de Thales de Mileto. División interior y exterior de un trazo. Teorema de Apolonio.
4	Semejanza	Semejanza de Polígonos de lo general a lo particular. Relaciones Métricas en el triángulo rectángulo, Teorema particular y general de Pitágoras. Relaciones Métricas en la circunferencia. Sección áurea de un trazo.

Finaliza el libro con dos “Evaluaciones Sumativas” y con un solucionario de todos los ejercicios, incluyendo luego las respuestas correctas de “las evaluaciones sumativas”. Cabe destacar que al término de cada unidad, los autores realizan un pequeño extracto de lo tratado, agregando una serie de ejercicios, los cuales presentan su “respuesta correcta” en las últimas páginas del libro.

- **MACt2: Tipo de Presentación.**

El texto presenta una estructura tipo Axiomática y las actividades que presenta se ajustan al estilo Mecanicista. El texto comienza con definiciones, y empleando sólo la definición inicial de potencias, desarrolla un ejercicio, para luego generalizar sin restricciones, estableciendo de esta forma el ponerse de acuerdo primero en el concepto

nuevo y después con su notación, por medio de la definición que expone. Luego presenta la sección “Serie de Ejercicios” donde los estudiantes deben seguir la lectura que se supone les indica cómo se hacen los ejercicios, con una metodología instruccional y única, los cuales presentan su “respuesta correcta” en las últimas páginas del libro. Incluyendo a continuación de éstos con unos pocos problemas de enunciado, que pretenden la práctica de lo aprendido, en conjunto y otras “Actividades y Entretenciones”, que no tiene relación con el contenido de la Unidad. Se cataloga entonces con el par (A,M) = (axiomático, mecanicista).

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Es en la primera unidad “Potencias y Raíces”, donde aparecen los radicales como objeto de estudio, donde se le destina 26 de las 233 páginas del texto, esto es, aproximadamente la novena parte del libro, equivalente al 11,16%.

Los radicales son introducidos en esta Unidad, desarrollada bajo la siguiente organización:

• Contenidos Unidad “Potencias y Raíces”:

Raíces.

- Multiplicación de raíces de igual índice.
- División de raíces de igual índice.
- Extracción de la raíz de una raíz.

Signos de una raíz.

- Raíz de cantidad subradical positiva e índice impar.
- Raíz de cantidad subradical negativa e índice impar.
- Raíz de cantidad subradical positiva e índice par.
- Raíz de cantidad subradical negativa e índice par.

Transformación de una Expresión Algebraica con Raíces.

- Racionalización de una fracción.
- Amplificación y simplificación de índice en una raíz.

Los radicales aparecen también en las otras unidades, a modo de aplicación, como una herramienta a utilizar, pero en otros ámbitos, como por ejemplo, en parte de la Unidad de “Ecuaciones de Segundo Grado”, y en las subunidades de ésta, denominadas “Resolución de ecuaciones irracionales que se reducen a ecuaciones de segundo grado” y “Resolución de ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones de segundo grado”, que se trabaja a nivel general, tal como lo hace en la Unidad 3 y 4 con el empleo de expresiones cuadráticas, en el tratamiento del Teoremas de Euclides y Pitágoras, como en la aplicación de la Sección Áurea.

- **MACT4: Presentación de los Radicales.**

La presentación de los radicales se comprende mejor al mirar la secuencia de temas desarrollados, los que son especificados a continuación:

Raíces.

Comienza entregando la siguiente definición.

Raíz aritmética de un número es la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener el número dado.

Luego da dos ejemplos con el cual relaciona el concepto de raíz, con el de potencia.

2 es la raíz cuarta de 16, ya que:
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Lo anterior expresado en forma de potencia:

2 es la raíz cuarta de 16, ya que:
 $2^4 = 16$

A continuación plantea un ejemplo, con el que pretende emplear lo siguiente

Se define **raíz de una expresión algebraica** como aquella expresión que, elevada a una potencia, es igual a la expresión dada.

De este modo:

a es la raíz enésima de **b** si y sólo si $a^n = b$, lo que se denota de esta manera:

$$a = \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo:

$3b$ es la raíz cuadrada de $9b^2$, ya que:
 $(3b) \cdot (3b) = (3b)^2 = 9b^2$

Pero también $(-3b)$ es la raíz cuadrada de $9b^2$, ya que:

$$(-3b) \cdot (-3b) = (-3b)^2 = 9b^2$$

Entonces, lo anterior se puede expresar del siguiente modo:

$$\sqrt{9b^2} = \pm 3b$$

De acuerdo a la definición anterior y al ejemplo que presenta, se puede conocer, el trabajo que realizan los autores, sin restricciones y con los errores conceptuales del doble signo, al usar el signo radical y las convenciones señaladas.

Luego relaciona el concepto de raíz con el de potencia desde el punto de vista operatorio, para explicar de este modo, las reglas para multiplicar y dividir raíces, como también para extraer raíz de una raíz.

Multiplicación de raíces de igual índice.

Esta regla, la plantea de la siguiente forma, sin ningún tipo de restricción, tal como se presenta a continuación:

Para multiplicar raíces de igual índice, se conserva la raíz y se multiplican las cantidades subradicales.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{12}$$

Podemos demostrar lo anterior del siguiente modo:

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b} \text{ ya que}$$

$$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}} \quad (1)$$

$$\sqrt[x]{b} = b^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \text{Reemplazando por (1) y (2)}$$

$$= a^{\frac{1}{x}} \cdot b^{\frac{1}{x}}$$

Por teorema del producto de potencias de igual exponente, tenemos:

$$= (a \cdot b)^{\frac{1}{x}}$$

Por propiedad que indica que toda potencia de exponente fraccionario es una raíz:

$$= \sqrt[x]{ab}$$

Entonces, queda demostrado que:

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b}$$

Se observa además que la demostración posee errores lógicos, basándose en la notación de potencia.

División de raíces de igual índice.

Del mismo modo, que en la regla anterior, los autores enuncian sin restricción alguna, unilateralmente, mostrando un ejemplo, que carece de todo tipo de formalización, con errores conceptuales del doble signo, para luego realizar una demostración basada en las propiedades de potencias.

Para dividir raíces de igual índice, se conserva la raíz y se dividen las cantidades subradicales.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{50} : \sqrt{2} &= \sqrt{\frac{50}{2}} \\ &= \sqrt{25} \\ &= \pm 5\end{aligned}$$

Podemos también demostrar lo anterior de esta forma:

$$\sqrt[x]{a} : \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{\frac{a}{b}} \quad \text{ya que}$$

$$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}} \quad \textcircled{1} \quad \text{Usando } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2}$$

$$\sqrt[x]{b} = b^{\frac{1}{x}} \quad \textcircled{2}$$

$$\sqrt[x]{a} : \sqrt[x]{b} = a^{\frac{1}{x}} : b^{\frac{1}{x}}$$

Por teorema de la división de potencias de igual exponente, tenemos:

$$\sqrt[x]{a} : \sqrt[x]{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Expresándolo como raíz:

$$\sqrt[x]{a} : \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{\frac{a}{b}}$$

Entonces, queda demostrado que:

$$\sqrt[x]{a} : \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{\frac{a}{b}}$$

Extracción de la raíz de una raíz.

Como ya es característica en los autores, al tratar esta regla, no hacen ningún tipo de restricción, ni formalismo. Trabajan esta propiedad en forma unilateral, utilizando una demostración basada nuevamente en las propiedades de potencias.

Para extraer la raíz de una raíz, se conserva la cantidad subradical y se multiplican los índices.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} \\ = 2$$

Demostremos lo anterior:

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a} \text{ ya que:}$$

$$\sqrt[y]{a} = a^{\frac{1}{y}} \text{ Así:}$$

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[x]{a^{1/y}}$$

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = a^{x \cdot \frac{1}{y}}$$

Efectuando la división en el exponente:

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = a^{\frac{1}{xy}}$$

Expresando la potencia como raíz:

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$$

Signos de una raíz.

Los autores deciden presentar los posibles casos de acuerdo a los signos de los radicales, analizando los índices y cantidades subradicales, lo que claramente respalda su error del doble signo.

Raíz de cantidad subradical positiva e índice impar.

En este punto, se concuerda con el análisis realizado por los autores al estudiar los casos posibles, pero no así con el vocablo empleado, ya que de esta forma omite la existencia del cero como cantidad subradical, pero veamos a continuación en específico estas posibilidades planteadas. Las cuales se presentarán tal como están en el texto.

Raíz de cantidad subradical positiva e índice par.

Aparece en este apartado el error del doble signo de modo explícito. He aquí la evidencia.

Toda raíz de índice par de una cantidad subradical positiva, siempre tiene doble signo.

Ejemplo 1:

$$\sqrt[4]{+16} = \pm 2 \text{ ya que } \begin{cases} (+2)^4 = +16 \\ (-2)^4 = +16 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt{+25} = \pm 5 \text{ ya que } \begin{cases} (+5)^2 = +25 \\ (-5)^2 = +25 \end{cases}$$

De un modo general:

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm b \text{ siendo } b^{2n} = a$$

Tal como lo dicen los autores, al especificar el conjunto numérico, se encuentran con que la cantidad subradical no puede ser negativa si el índice es par, entonces es válido en ese discurso que trascienda el error del doble signo de R a C.

Para determinar el signo o valor de las raíces de cantidad subradical negativa e índice par, es necesario que amplíemos nuestro ámbito numérico y definamos el **conjunto de los números complejos**, designado por \mathbb{C} .

En \mathbb{C} se define:

$$\sqrt{-1} = i \quad \wedge \quad -1 = i^2$$

A $\sqrt{-1} = i$ se la conoce con el nombre de **unidad imaginaria**.

La unidad imaginaria es igual a $\sqrt{-1}$ y el cuadrado de esta unidad es -1 .

Volviendo al ejemplo anterior, intentemos ahora obtener la $\sqrt{-36}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{-36} &= \sqrt{+36 \cdot -1} && \text{Descomponiendo:} \\ \sqrt{-36} &= \sqrt{+36} \cdot \sqrt{-1} \\ \sqrt{-36} &= \pm 6 \cdot i \\ \sqrt{-36} &= \pm 6i \end{aligned}$$

Es decir, $\sqrt{-36}$ es igual a 6 veces la unidad imaginaria.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}\sqrt{-81} &= \sqrt{+81} \cdot \sqrt{-1} \\ \sqrt{-81} &= \pm 9 \cdot i \\ \sqrt{-81} &= \pm 9i\end{aligned}$$

De un modo general:

$$\sqrt{-a} = \pm \sqrt{a} \cdot i$$

El problema que vemos hasta ahora, es que nuevamente cometen el error conceptual del doble signo, al descomponer en producto de radicales y llevar esa expresión a otra equivalente.

Sin embargo desconcierta su trabajo, cuando realiza el siguiente ejemplo, debido a que no comete los mismos errores conceptuales del doble signo, al igual que en el tratamiento de las potencias de i :

Obtener el valor de $\sqrt{4} + \sqrt{-25}$

$$\begin{aligned}\sqrt{4} + \sqrt{-25} &= \\ 2 + \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} &= \\ 2 + 5i &= \end{aligned}$$

En este ejemplo hemos obtenido un número compuesto de una parte real (2) y de una parte imaginaria (5i). A los números de ese tipo se los conoce con el nombre de **números complejos**.

Como puedes observar a través de los ejemplos anteriores, toda raíz de índice par y cantidad subradical positiva, es positiva y negativa; y toda raíz de índice par y cantidad subradical negativa, es un número imaginario que pertenece a los complejos.

Potencias de i:

Por definición:

$$i = \sqrt{-1} \wedge i^2 = -1$$

Ahora bien, utilizando $i \wedge i^2$ podemos calcular i^3 :

$$\begin{aligned}i^3 &= i^2 \cdot i \\ i^3 &= -1 \cdot \sqrt{-1} \\ i^3 &= -\sqrt{-1} \quad \text{es decir:} \\ i^3 &= -i\end{aligned}$$

Calculemos a continuación i^4 :

$$\begin{aligned}i^4 &= i^2 \cdot i^2 \\ i^4 &= -1 \cdot -1 \\ i^4 &= +1\end{aligned}$$

En general, para calcular una potencia cualquiera de i se emplean las potencias ya conocidas.

Ejemplo 1:

Calcular i^{26}

$$\begin{aligned}i^{26} &= (i^4)^6 \cdot i^2 \\ i^{26} &= (+1)^6 \cdot (-1) \\ i^{26} &= 1 \cdot (-1) \\ i^{26} &= -1\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Calcular i^{15}

$$\begin{aligned}i^{15} &= (i^4)^3 \cdot i^3 \\ i^{15} &= (+1)^3 \cdot (-i) \\ i^{15} &= 1 \cdot (-i) \\ i^{15} &= -i\end{aligned}$$

- **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

El tratamiento de las propiedades comienza en la página 25 con la continuación de los temas que ya describimos en el campo anterior (MACt4).

Comienza entregando una definición correspondiente a raíz aritmética de un número.

Raíz aritmética de un número es la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener el número dado.

La definición anterior, es aceptable, el problema es que después de dos ejemplos con los cuales relaciona el concepto de raíz, con el de potencia, plantea una definición, para raíz de una expresión algebraica, que carece de restricciones y que contiene errores de contenido al usar doble signo, para un mismo radical.

Se define **raíz de una expresión algebraica** como aquella expresión que, elevada a una potencia, es igual a la expresión dada.

De este modo:

a es la raíz enésima de **b** si y sólo si $a^n = b$, lo que se denota de esta manera:

$$a = \sqrt[n]{b}$$

De aquí en adelante, tal cómo se mostró en el campo anterior (MACt4), los errores antes mencionados aparecen constantemente, y sin ningún tipo de formalismos.

Ya cuando pasan a trabajar con las propiedades, denominadas por los autores “reglas”, nos encontramos con que cada una de las propiedades las demuestra utilizando, propiedades de potencias, justificando que los radicales se pueden escribir en lo que ha productos y cuocientes se refiere, en potencias con exponentes fraccionarios, validando así, que las reglas de cálculo para potencias, valen también, no sólo para exponentes enteros, sino también para exponentes fraccionarios. Conocimiento impuesto al cuál los autores no invitan a verificar.

Cada una de las propiedades es analizada unilateralmente, dejando a cargo del alumno toda la responsabilidad el caer en los errores antes mencionados. Debido a que los estudiantes muy probablemente no entenderán con el conjunto numérico con el cuál están trabajando y pasarán por alto las restricciones necesarias, como por ejemplo, para un radical de orden par.

Cuando los autores deciden presentar los posibles casos al hablar de Signos de una raíz, analizando los índices y cantidades subradicales, tales como: Raíz de cantidad subradical positiva e índice impar; raíz de cantidad subradical positiva e índice par; raíz de cantidad subradical negativa e índice impar, raíz de cantidad subradical positiva e índice par, raíz de cantidad subradical negativa e índice par. Se concuerda con ellos al estudiarlos por separado, pero notamos que omiten la existencia del cero como cantidad subradical. Es justo en el último caso que vemos que por primera vez, mencionan el conjunto numérico con el cuál trabajan (\mathbb{R}), encontrándose con la necesidad de ampliar esta visión, ya que encuentran que la cantidad subradical no puede ser negativa, si el índice es par, entonces validan esto para números que pertenecen al Conjunto de los números Complejos. El problema que vemos hasta ahora, es que nuevamente cometen el error conceptual del doble signo, al descomponer en producto de radicales y llevar esa expresión a otra equivalente.

Sin embargo desconcierta el trabajo de los autores, al mostrar un ejemplo, que no comete los mismos errores conceptuales del doble signo, al igual que en el tratamiento de las potencias de i .

Lo lamentable es que ni siquiera, al término de la unidad, cuando entregan un extracto de lo tratado, indican restricciones, sin entender la intención de los autores, que para no complicar el estudio, no logran la institucionalización de las propiedades.

- **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

En este campo observaremos los contenidos que hacen que el objeto radicación, pase a ser una herramienta. Estos son: Racionalización, Ecuaciones con radicales y la ecuación cuadrática.

- Una primera aplicación del álgebra de radicales aparece en la página 34, en la institucionalización de un modelo de racionalización, denominados por los autores, como Transformación de una Expresión Algebraica con Raíces.

Racionalizar una fracción algebraica consiste en eliminar la o las raíces que ella contiene en el numerador o en el denominador.

Racionalizar el denominador de una fracción es convertir dicha fracción en otra equivalente, de modo que su denominador sea un número racional.

Cuando se racionaliza el denominador de una fracción, desaparece el signo de raíz en dicho denominador.

Los casos más frecuentes de racionalización son:

- a) racionalizar fracciones que contengan una raíz cuadrada.
- b) racionalizar fracciones que contengan una raíz enésima.
- c) racionalizar fracciones que contengan la suma de dos o más raíces cuadradas.

Continúa el análisis dando a conocer terminologías y notaciones, seguidas de dos ejemplos donde racionalizan tanto denominadores como numeradores, terminando con una conclusión. Llama la atención, que al racionalizar distintos tipos de expresiones, los autores no cometan los errores conceptuales del doble signo, al desarrollar los ejemplos.

Lo único refutable que trae el texto respecto a la racionalización, es que no hay restricciones, dando a lugar la opción de que las cantidades subradicales sean cero, invalidando todo el estudio al admitir fracciones con denominador igual a cero, debido a

que $\sqrt{0} = 0$. La técnica sólo la explican a través de los ejemplos antes mencionados, no incluye demostración.

- En una segunda aplicación tenemos a las Ecuaciones con radicales. Si bien es cierto es un tema que formalmente se trabaja prácticamente en tres páginas a partir del sector inferior de la página 73, hasta la mitad de la página 76. Nos encontramos con que en la cuarta serie de ejercicios de la unidad anterior, en el ítem 5 y en el ítem 14, se pide encontrar soluciones para ecuaciones con radicales.

5. Soluciona las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{1 + \sqrt{2x + 1}} = 2$

b) $\sqrt{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

c) $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}$

d) $\sqrt{6 + \sqrt{4 + \sqrt{2 + x}}} = 3$

e) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{x}}}}} =$

f) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{\frac{x}{2}} = 3$

e) $\sqrt{\frac{x + 3}{x}} = 2$

b) $\sqrt{\frac{x}{2a}} = 1$

f) $\sqrt{\frac{x}{a}} = a$

c) $\sqrt{\frac{x}{2-a}} = 4$

g) $\sqrt{4x - 7} = 6 - \sqrt{4x - 7}$

d) $\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} = 3$

h) $\sqrt{\frac{x + 3}{x}} = \sqrt{\frac{x - 3}{x + 3}}$

En cuanto a la presentación de las ecuaciones irracionales que se reducen a ecuaciones de segundo grado, las entiende como aquellas que tienen incógnitas en la o las cantidades subradicales, de uno o más de uno de los radicales que presenta la expresión, sin hacer mención directa de esto, sino que lo dejan en evidencia con los ejemplos planteados. De este modo, vemos que cae en el problema de identificar como irracional a las expresiones con $\sqrt{\quad}$. Se da así la confusión entre expresiones radicales y expresiones irracionales. Éstas últimas tal como se explicó en otra presentación se intersectan con las primeras, pero ninguna es subconjunto de la otra. La expresión \sqrt{a} con $a \geq 0$ será irracional sólo en el caso que a no se pueda escribir como fracción entre enteros.

1.8. Resolución de ecuaciones irracionales que se reducen a ecuaciones de segundo grado:

Las ecuaciones con radicales se resuelven anulando los radicales mediante la elevación a potencia de los dos miembros de la ecuación. El índice del radical indica a qué potencia se deben elevar ambos miembros de la ecuación.

Si la ecuación que resulta al elevar a potencia es de segundo grado, al resolverla se obtendrán dos raíces que será necesario verificarlas, ya que al elevar a una misma potencia ambos miembros de una ecuación, generalmente se introducen nuevas soluciones que no satisfacen la ecuación dada. Por no satisfacer la ecuación, estas soluciones reciben el nombre de **soluciones extrañas** o **inadmisibles** y no son aceptadas como raíces de la ecuación.

Además en la presentación que hacen los autores, no indican que elevando al cuadrado a ambos lados se llega a una nueva ecuación, que es otra no equivalente a la primera.

Un punto importante a destacar, es que, si especifican el porqué debe reemplazarse la o las soluciones obtenidas en la ecuación original, haciendo mención a que se pueden encontrar con soluciones denominadas extrañas o inadmisibles, que son aquellas que no satisfacen la igualdad dada inicialmente, indicando que éstas no son aceptadas como raíces de la ecuación, en el caso que haya resultado una ecuación de segundo grado. Luego de la presentación desarrolla dos ejemplos.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3-x} = \sqrt{2x}$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación $x + 3\sqrt{x} = 3x - 2$.

Cabe mencionar que en los ejemplos desarrollados, no encontramos errores de doble signo, como en la unidad anterior.

Ya en la página 81, como en la 87, nos encontramos con que en la primera serie de ejercicios, como en la segunda, en los ítems 10 de cada una de ellas, se pide encontrar soluciones para ecuaciones con radicales.

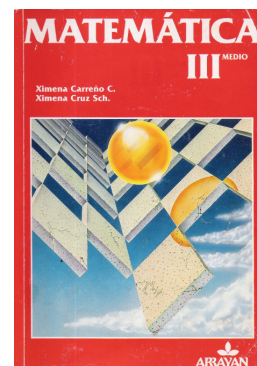
- La última aplicación de los radicales que veremos está en la resolución de las ecuaciones de segundo grado. En la página 53, se presenta la unidad, exponiendo distintos tipos de ecuaciones de esta índole, sin embargo a partir de la página 55, nos encontramos con el siguiente subtítulo “Raíces de una ecuación de segundo grado”, es aquí, donde los autores, toman la convención de raíces como las soluciones de una ecuación de segundo grado.

Por otra parte, en la resolución de ecuaciones, sólo se muestra por factorización un caso en que el trinomio, se puede expresar en un producto de factores de la forma: $(x+a)(x+b)=0$. Obteniéndose así las dos soluciones de esa ecuación. Del mismo modo, presentando una ecuación de segundo grado completa, se deduce una fórmula que más adelante, la utilizarán para encontrar las soluciones de cualquier tipo de ecuación de segundo grado.

6.2.4.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 4b.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El dispositivo se denomina “Matemática III Medio”, texto para el estudiante. Es un libro nacional, cuyo año de aprobación por la Dirección de Educación es en 1988, y su distribución es de carácter comercial.



• MIGt2: Datos de Autoría.

El equipo de autoría se conforma de dos Profesoras.

Autores:

- Autor 1: Profesora de Matemática, Título obtenido en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Orientadora, Instituto Chileno de Cultura Hispánica. Consejo Mundial de Educación. Profesora de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesora del Colegio Saint George's Collage, Santiago.
- Autor 2: Profesora de Estado en Matemática y Física, Título obtenido en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Magíster en Educación, mención Currículum, Universidad de Tarapacá. Ex - Profesora de la Universidad Católica del Norte, Sede Arica. Profesora de la Universidad de Tarapacá, Facultad de Humanidades. Directora del Colegio San Marcos de Arica.

Según estos datos, se puede observar que el texto está realizado por dos Autoras, de las cuales se obtuvo más información acerca de su campo laboral y sus grados académicos, en otro texto realizado por ellas y que también analizaremos.

• MIGt3: Edición y tipo de obra.

La obra, corresponde a un libro de texto para el nivel de 3° año de enseñanza media. Pertenece a la Editorial Arrayán, la que inscribió el texto, en el año 1986, y que fue aprobado por la Dirección de Educación en 1988. Impreso en Chile por Morgan Antártica, y su distribución es carácter comercial en todo el país. Se desconoce el año de la edición revisada.

• MIGt4: Presentación física.

El libro contiene 176 páginas blancas con impresión a color y cuyo tamaño es de 18 cm x 26 cm.

6.2.4.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 4b.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en 10 Unidades.

Tabla 6.5. Organización temática del texto 4b.

Unidad	Nombre	Descripción
1	Potencias	Comienza con una breve introducción, con algunas definiciones de potencias de exponente natural, continuando con propiedades de potencias, luego trabajan con potencias de exponente entero, continuando el estudio con potencias de exponente real., finalizando con la presentación de las ecuaciones exponenciales.
2	Raíces	Se entrega una definición de radicación, analiza propiedades, continúa con racionalización y Ecuaciones con radicales.
3	Ecuación de segundo grado	Estudia la ecuación de segundo grado, empleando los métodos de: resolución por factorización, completación del trinomio cuadrado perfecto y utilización de la fórmula general. Análisis de las soluciones (<i>naturaleza de las raíces</i>), propiedades, luego trabaja con ecuaciones reductibles que se reducen a ecuaciones de segundo grado (<i>Ecuaciones fraccionarias, uso de la variable auxiliar, ecuaciones irracionales</i>).
4	Función cuadrática	Después de una introducción, expone la función cuadrática para representar lo obtenido con una ecuación cuadrática, analizando concavidad y vértice, denominados máximos y mínimos de la función cuadrática. Luego analiza las inequaciones de segundo grado y su <i>solución tanto gráfica, como algebraica</i> .
5	Geometría Proporcional	Realiza un breve análisis del concepto de proporción, mencionando algunas propiedades, continuando con segmentos proporcionales, teorema particular y general de Thales, y división interior y exterior de un trazo. Siguiendo el estudio con el concepto de figuras semejantes, a modo de introducción para Triángulos semejantes. Luego se trabaja con el Teorema de Euclides y Pitágoras. Segmentos proporcionales en la circunferencia. Finalizando la unidad con Sección áurea o divina.
6	Trigonometría	Se realiza una presentación al tema, analizando los sistemas de medición de ángulos, continuando el trabajo con razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, en general y para algunos ángulos. Luego analiza algunas identidades trigonométricas. A continuación, en funciones trigonométricas, analiza la circunferencia unitaria, las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Luego en ecuaciones trigonométricas, analiza funciones trigonométricas inversas, y solución de ecuaciones trigonométricas. Continúa el estudio con resolución de triángulos, utilizando el teorema del seno y del coseno, para triángulos no rectángulos.
7	Polígonos	Introduce al tema con algunas definiciones y teoremas, continuando con

		polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia, como también con circunferencia ex-inscrita a un triángulo. Polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia. Longitud de una circunferencia, área del círculo y aplicación del álgebra a la solución de problemas geométricos.
8	Geometría analítica	Realiza una breve introducción, continuando con sistemas de coordenadas cartesianas, análisis de la pendiente de la recta, rectas paralelas y perpendiculares, cálculo de distancia entre dos puntos, mediante fórmula. Ecuación de la recta. Ecuación de la circunferencia. Ecuación de cónicas como elipse, hipérbola y parábola.
9	Vectores	Comienzan el estudio, con algunas definiciones, continuando con operaciones con vectores y propiedades, producto de un escalar por un vector. Espacio vectorial. Dependencia e independencia lineal, finalizando con álgebra vectorial en LOGO
10	Soluciones de ejercicios propuestos	Entrega las soluciones de ejercicios propuestos en cada una de las unidades anteriores.

• **MACT2: Tipo de Presentación.**

El texto presenta una estructura tipo Axiomática y las actividades que presenta se ajustan al estilo Mecanicista. Los contenidos los trata partiendo por las definiciones, sembrando el modelo axiomático puro. Luego presentan una serie de ejemplos clasificados bilateralmente, en cada una de las propiedades. En cuanto al tipo de actividades, la gran mayoría son ejercicios de rutina, donde los estudiantes deben seguir la lectura que se supone les indica cómo se hacen los ejercicios, con una metodología instruccional y única, los cuales presentan su solución en las últimas páginas del libro, de acuerdo a lo anterior se clasifica en la categoría de mecanicista. Asignándose entonces el par (A, M) a este texto.

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Es en la segunda unidad “Raíces”, donde aparecen los radicales como objeto de estudio, se le destinan 15 de las 176 páginas del texto, esto es, aproximadamente la novena parte del libro, equivalente al 8,5%.

Los radicales son introducidos en esta Unidad, desarrollada bajo la siguiente organización:

- Contenidos Unidad “Raíces”:

Potencias.

Radicación.

Definición.

Propiedades.

Racionalización.

Número irracional.

Técnicas de racionalización.

Ecuaciones irracionales.

Los radicales aparecen también en las otras unidades, a modo de aplicación, como una herramienta a utilizar, pero en otros ámbitos, como por ejemplo, en parte de la Unidad de “Ecuaciones de Segundo Grado”, y a nivel general, en el tratamiento del Teoremas de Euclides y Pitágoras, como en la aplicación de la Sección Áurea.

- **MACT4: Presentación de los radicales**

Los radicales son introducidos en la página 17 en la unidad 2 titulada “raíces”. Su introducción es la siguiente:

2.2 Radicación

2.2.1 DEFINICIÓN:

Denominamos **raíz enésima** de a y la denotamos por $\sqrt[n]{a}$ al número b tal que $b^n = a$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y si n es par, entonces $a \geq 0$.

Observaciones:

1. La raíz segunda de a se denomina **raíz cuadrada** y se denota \sqrt{a} .
2. La raíz tercera de a se denomina raíz cúbica y se denota $\sqrt[3]{a}$.
3. La expresión $\sqrt[n]{a} = b$ es equivalente a la expresión $a = b^n$.
4. En la expresión $\sqrt[n]{a} = b$;
 - a se denomina **cantidad subradical**
 - n se denomina **grado o índice** de la raíz
 - b se denomina **raíz enésima** de a
5. El símbolo $\sqrt{\quad}$ es un operador que nos indica la operación que debemos efectuar entre los números a y n ; dicha operación recibe el nombre de **radicación o extracción de raíz enésima**.

Se observa que confunde los conceptos de raíz n – ésima de un número real y de raíz n – ésima aritmética (o radical) de un número real. La definición es una mezcla de ambas nociones.

Por otra parte, el punto 3, asegura que las expresiones $\sqrt[n]{a} = b$ y $a = b^n$ son equivalentes, lo que implica que en su concepción, se puede escribir que $\sqrt{16} = \pm 4$, lo que se observa en la continuación del discurso, donde aparecen 7 ejemplos de este tipo que justifica en función de la “operación contraria”, la potenciación.

Luego da algunas observaciones que merecen ser analizadas:

Observaciones:

De los ejemplos anteriores podemos concluir que:

1. Si el índice de la raíz (n) es par, ésta tiene dos soluciones reales
Ejemplo $\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt[4]{81} = \pm 3$
La raíz positiva se denomina **raíz principal** y en este texto consideraremos sólo ésta a menos que expresamente se indique lo contrario.
2. Las raíces de índice par están definidas sólo para cantidades subradicales mayores o iguales a cero. Por ejemplo, consideremos $\sqrt{-4}$. Si existiera $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sqrt{-4}$ se debería cumplir que $x^2 = -4$, lo cual como sabemos es falso pues $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
3. Las raíces de índice impar tienen una sola solución y ésta tiene el signo de la cantidad subradical.
Ejemplos: $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[5]{-32} = -2$

En la observación n°1 presenta el concepto de raíz principal pero ya parte de una notación errónea, pues la raíz principal de 4 se escribe $\sqrt{4}$ que es 2 y la raíz secundaria (o la otra) es $-\sqrt{4}$ que es -2. Hay ruptura del saber erudito en su transposición a la matemática escolar.

Otro elemento a considerar es la restricción que sólo la da para el radicando con el fin de trabajar en \mathbb{R} . Finalmente la observación n°3, muestra que acepta los radicandos negativos para los radicales de orden impar, sin embargo, en página 21, indica como propiedad que “toda raíz se puede escribir en forma de potencia”, estableciendo la notación $a^{\frac{m}{n}}$ para $\sqrt[n]{a^m}$ y restringiendo el valor de a para los números reales positivos. No hay explicación alguna de por qué en un momento anterior aceptó, por ejemplo, la expresión $\sqrt[3]{-8}$, si *toda raíz se puede escribir en forma de potencia*, por lo que en su

discurso sería válido hacer $(-8)^{\frac{1}{3}}$, pero esto violaría la condición que expone para la cantidad subradical.

• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

El tratamiento de las propiedades comienza en la página 17 con la continuación de los temas que ya describimos en el campo anterior (PACt4).

Comienza con una introducción en la que los autores proponen encontrar un valor para x , en la expresión $x^p = q$, señalando que: *debemos encontrar el número que multiplicado p veces por sí mismo nos da q* . Indicando que la operación que se debe efectuar para resolver este problema se llama **Radicación**. Señalando lo siguiente:

DEFINICION:

Denominamos **raíz enésima** de a y la denotamos por $\sqrt[n]{a}$ al número b tal que $b^n = a$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y si n es par, entonces $a \geq 0$.

Luego entrega una serie de observaciones, seguidas por un listado de ejemplos.

1.	$\sqrt{16}$	= ± 4	porque	$4^2 = 16$	y	$(-4)^2 = 16$
2.	$\sqrt{25}$	= ± 5	porque	$5^2 = 25$	y	$(-5)^2 = 25$
3.	$\sqrt[3]{8}$	= 2	porque	$2^3 = 8$		
4.	$\sqrt[3]{-27}$	= -3	porque	$(-3)^3 = -27$		
5.	$\sqrt[4]{81}$	= ± 3	porque	$3^4 = 81$	y	$(-3)^4 = 81$
6.	$\sqrt[5]{32}$	= 2	porque	$2^5 = 32$		
7.	$\sqrt[5]{-32}$	= -2	porque	$(-2)^5 = -32$		

A modo de conclusión presentan luego otras observaciones que marcarán la diferencia en el trabajo de las propiedades de los radicales.

Observaciones:

De los ejemplos anteriores podemos concluir que:

1. Si el índice de la raíz (n) es par, ésta tiene dos soluciones reales
Ejemplo $\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt[4]{81} = \pm 3$
La raíz positiva se denomina **raíz principal** y en este texto consideraremos sólo ésta a menos que expresamente se indique lo contrario.
2. Las raíces de índice par están definidas sólo para cantidades subradicales mayores o iguales a cero. Por ejemplo, consideremos $\sqrt{-4}$. Si existiera $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sqrt{-4}$ se debería cumplir que $x^2 = -4$, lo cual como sabemos es falso pues $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
3. Las raíces de índice impar tienen una sola solución y ésta tiene el signo de la cantidad subradical.
Ejemplos: $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[5]{-32} = -2$

Efectuemos ahora el siguiente ejercicio:
Calculemos $\sqrt[3]{8}$. Como sabemos debemos encontrar un número que elevado a 3 nos dé 8. Ese número es 2 porque $2^3 = 8$.
Luego $\sqrt[3]{8} = 2$.
Ahora si este resultado lo elevamos a 3 obtenemos $2^3 = 8$ (volvemos al número 8)

En general: $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

Es decir, las operaciones de radicación y potenciación son inversas una de la otra.

Las propiedades que presenta, tales como: raíz de un producto, producto de raíces, raíz de un cociente, y raíz de una raíz, las demuestran con todos los cuidados pertinentes, para no caer en errores conceptuales, e indirectamente las trabajan bilateralmente, al explicar una en un sentido seguida de otra que explica la anterior en sentido contrario de la igualdad. Y de acuerdo a la convención de trabajar con lo que denominan *raíz principal*, no se encuentran errores conceptuales del doble signos tanto en los ejemplos desarrollados, como en los ejercicios propuestos, y restringen cuando es necesario. Logrando así la institucionalización de las propiedades.

• **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

En este campo observaremos los contenidos que hacen que el objeto radicación, pase ser una herramienta. Estos son: Racionalización, Ecuaciones con radicales y la ecuación cuadrática.

- Una primera aplicación del álgebra de radicales aparece en la página 26, en la institucionalización de un modelo de racionalización, comenzando con una breve explicación acerca del concepto de números irracionales.

Todo número que no se pueda escribir en forma de número racional se denomina número **irracional** y entre ellos se encuentran todos aquellos que no tienen una raíz exacta, por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[5]{2}$, $3 + \sqrt{2}$, etc.

Luego a modo de introducción, continúa el análisis con un comentario acerca de expresiones fraccionarias que tienen en su denominador números irracionales, indicando que se pueden *transformar* efectuando *una amplificación adecuada, hasta dejar su denominador en forma de un número racional*, señalando que este proceso se denomina racionalización.

Continúa el análisis dando a conocer técnicas de racionalización, explicándolas

directamente con ejemplo tales como: $\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-1}$, $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, señalan

además que se tienen otras fracciones con radicales, que según los autores, corresponden a *ejemplos de racionalizaciones, menos frecuentes, pero que son importantes y que se*

deben conocer, tales como. $\frac{3}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}$. Cabe hacer notar, que los

autores no dan a entender que se puede racionalizar tanto los denominadores como numeradores, restringiendo así la visión de la utilidad de la racionalización. Otro punto importante es que no hay restricciones para los denominadores utilizados, dando a lugar la opción de que las cantidades subradicales sean cero, invalidando todo el estudio al admitir fracciones con denominador igual a cero, señalando sólo esa posibilidad al comienzo en la introducción, cuando se mencionó que:

En cursos anteriores hemos estudiado que existen números tales como $\sqrt{2}$ que no se pueden escribir como número racional, es decir, en la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

Continuando luego, con un listado de ejercicios, donde se indica que se debe racionalizar los denominadores de las fracciones entregadas. Los autores en esta sección no cometen errores conceptuales del doble signo.

- En una segunda aplicación tenemos a las ecuaciones con radicales, que aparecen en la página 29, con la siguiente definición:

Se llama ecuación irracional a toda ecuación que presenta alguna incógnita en forma de subradical.

Ya en la página 30, nos encontramos con una explicación por parte de los autores, acerca de la forma de encontrar soluciones para ecuaciones con radicales, denominados por estos, ecuaciones irracionales:

2.4.2 SOLUCION DE ECUACIONES IRRACIONALES

El procedimiento para resolver las ecuaciones irracionales consiste fundamentalmente en elevar la ecuación a la potencia necesaria para que se eliminen todas las raíces. Este método tiene el inconveniente que al elevar al cuadrado (en general a una potencia par) una ecuación podemos introducir en ella soluciones extrañas, ya que

$$a = b \implies a^2 = b^2 \text{ pero } a^2 = b^2 \not\implies a = b.$$

Para evitar este problema, lo que hacemos es resolver la ecuación elevando a potencia cuantas veces sea necesario, pero antes de entregar las soluciones comprobamos cada una de ellas en la ecuación original y las que no la satisfagan simplemente las deseamos.

Seguida de esta explicación, los autores entregan tres ejemplos desarrollados, seguidos de una serie de ejercicios por desarrollar, con algunas soluciones en las páginas finales del texto.

Cuidado nos causa uno de los ejemplos desarrollados, debido al comentario al finalizar este mismo, ya que da mal a entender el concepto, al caer en el error del doble signo:

Resolvamos la ecuación $3 - \frac{1}{4} \sqrt{7x} = 10$

Antes de elevar al cuadrado aislemos en un miembro la raíz a objeto de no tener que efectuar un cuadrado de binomio:

$$-\frac{1}{4} \sqrt{7x} = 7 \quad / \cdot (-4)$$

$$\sqrt{7x} = -28 \quad ()^2 \text{ (Elevando al cuadrado).}$$

$$7x = 784$$

$$x = 112$$

Si $x = 112$ entonces: $3 - \frac{1}{4} \sqrt{7x} = 3 - \frac{1}{4} \sqrt{7 \cdot 112}$

$$= 3 - \frac{1}{4} \sqrt{784}$$

$$= 3 - \frac{1}{4} \cdot 28$$

$$= -4 \neq 7$$

Observamos que si consideramos $\sqrt{784} = (28)^2$ la ecuación no tiene solución pero si consideramos $\sqrt{784} = (-28)^2$ entonces la solución de la ecuación sería exactamente $x = 112$.

Además vemos que cae en el problema del concepto de irracional, con el sólo hecho de enunciar las ecuaciones con radicales, como *ecuaciones irracionales*, mal utilizando el concepto, respecto del saber matemático. Se da así la confusión entre expresiones radicales y expresiones irracionales. Éstas últimas tal como se explicó en otra presentación se intersectan con las primeras, pero ninguna es subconjunto de la otra. La expresión \sqrt{a} con $a \geq 0$ será irracional sólo en el caso que a no se pueda escribir como fracción entre enteros.

Además en la presentación que hacen los autores, no indican que elevando al cuadrado a ambos lados se llega a una nueva ecuación, que es otra no equivalente a la primera.

Un punto importante a destacar, es que, si especifican el porqué debe reemplazarse la o las soluciones obtenidas en la ecuación original, haciendo mención a que se pueden encontrar con soluciones denominadas extrañas, que son aquellas que no satisfacen la igualdad dada inicialmente.

En la página 45, nos encontramos con la presentación de las ecuaciones irracionales (que se pueden transformar en ecuaciones de segundo grado), diciendo que son aquellas en que la variable aparece como cantidad subradical, volviendo a caer en el problema del concepto de irracional. Presentan luego dos ejemplos, continuando con una lista de ejercicios a desarrollar.

- La última aplicación de los radicales que veremos está en la resolución de las ecuaciones de segundo grado. En la página 33, se presenta la unidad con una breve explicación acerca de las expresiones polinomiales, en donde se hace mención al grado de la expresión, las cuales al escribirlas como funciones polinomiales e igualarlas a cero,

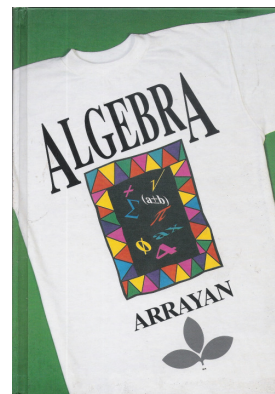
se pueden “resolver”, encontrando sus soluciones o raíces. Es aquí, donde los autores, toman la convención de raíces como las soluciones de una ecuación. Indican además que si se tiene un polinomio de grado n , entonces la ecuación tendrá n soluciones o raíces. Por ende, si el grado del polinomio es 2, entonces el polinomio es un **polinomio de segundo grado** y su ecuación asociada es la **ecuación de segundo grado**.

Después de esta explicación presentan métodos o técnicas para encontrar las raíces o soluciones de la ecuación de segundo grado. Comenzando con **factorización** donde se trabaja con la propiedad de que $a \cdot b = 0$, luego de una serie de ejemplos, trabajan el método de **completación de cuadrados**, y luego de otra serie de ejemplos desarrollados, trabajan la **fórmula general de solución de una ecuación de segundo grado**. En esta sección no se encuentran errores al encontrar las soluciones de dichas ecuaciones.

6.2.5.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 5b.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El dispositivo se denomina “Álgebra”, correspondiente a un compendio variados temas del álgebra elemental de enseñanza media. Es un libro nacional y su distribución es de carácter comercial.



• MIGt2: Datos de Autoría.

El equipo de autoría se conforma de dos Profesoras.

Autores:

- Autor 1: Profesora de Matemática, Título obtenido en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Orientadora, Instituto Chileno de Cultura Hispánica. Consejo Mundial de Educación. Profesora de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesora del Colegio Saint George's Collage, Santiago.
- Autor 2: Profesora de Estado en Matemática y Física, Título obtenido en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Magíster en Educación, mención Currículum, Universidad de Tarapacá. Ex - Profesora de la Universidad Católica del Norte, Sede Arica. Profesora de la Universidad de Tarapacá, Facultad de Humanidades. Directora del Colegio San Marcos de Arica.

Según estos datos, se puede observar que el texto está realizado por dos Autoras, de las cuales se obtuvo más información acerca de su campo laboral y sus grados académicos, en otro texto realizado por ellas y que también analizaremos.

• MIGt3: Edición y tipo de obra.

La obra, corresponde a un compendio de álgebra para enseñanza media. Pertenece a Arrayán Editores S.A., Impreso en Chile por Morgan Impresores, y su distribución es carácter comercial en todo el país. De la edición revisada, la primera, sólo se informa que corresponde a 1994.

• MIGt4: Presentación física.

El libro contiene 472 páginas blancas con impresión a color y cuyo tamaño es de 18,5 cm x 26,5 cm.

6.2.5.2 Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 5b.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en 12 Unidades.

Tabla 6.6. Organización temática del texto 5b.

Unidad	Nombre	Descripción
1	Álgebra en los números reales	Comienza con una breve explicación acerca del lenguaje algebraico, valorizando expresiones algebraicas, luego trabaja con la reducción de términos semejantes y uso de paréntesis, continuando con multiplicación algebraica, productos notables, factorización, terminando con fracciones algebraicas.
2	Ecuaciones e inecuaciones de primer grado	Trabaja con ecuaciones de primer grado de todo tipo y problemas afines, continuando con desigualdades e inecuaciones
3	Relaciones y funciones	Comienza trabajando lógica matemática, continuando con la Teoría de conjuntos, luego relaciones y finalmente funciones.
4	Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado	Estudia la ecuación cuadrática y la función cuadrática, realizando el estudio completo. Continúa el estudio trabajando con inecuaciones de segundo grado, seguido de sistemas de ecuaciones de segundo grado.
5	Polinomios y teoría de ecuaciones	Comienza entregando algunas definiciones y trabaja las operaciones con polinomios, en cuanto a lo que se denomina como Teoría de ecuaciones, parte definiendo raíz de un polinomio, trabajando el tema de cálculo de las raíces de un polinomio, factorización.
6	Potencias y Raíces	Comienza con algunas definiciones de potencias, continuando con propiedades de las potencias. Luego presenta las ecuaciones exponenciales. Se estudia la radicación con el nombre de Raíces, analiza propiedades, continuando con racionalización y Ecuaciones irracionales
7	Logaritmos	Se introduce este tema con una definición correspondiente a Logaritmos, se analizan propiedades, ampliando el conocimiento a ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
8	Números complejos	Comienza con definiciones y propiedades, potencias de i , continuando con conjugado y módulo de un complejo, siguiendo con la representación trigonométrica o forma polar de un número complejo.
9	Matrices y determinantes	Se trabaja con conceptos básicos, Igualdad y adición de matrices, luego con la ponderación de una matriz por un escalar, continuando con multiplicación de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones.
10	Sumatoria y Progresiones	Comienza el estudio con algunas definiciones, correspondientes a sumatoria, sucesiones, y Progresiones (aritmética, geométrica y armónica), continuando con inducción múltiple.
11	Análisis combinatorio, teorema del binomio y elementos de	Esta unidad se compone de Análisis combinatorio, teorema del binomio, y elementos de probabilidad.

	probabilidad	
12	Problemas	Se trabaja con aplicación de ecuaciones lineales enteras, fraccionarias, continuando con problemas misceláneos.

Finaliza el libro con dos índices, uno por capítulo, y el otro analítico ordenado alfabéticamente. Cabe destacar que al término de cada unidad, los autores entregan una serie de ejercicios, agregando una serie de ejercicios con alternativas, los cuales los presentan como “Prueba de selección múltiple”.

• **MACT2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

Los contenidos los trata partiendo por las definiciones, sembrando el modelo axiomático puro. En cuanto al tipo de actividades, la gran mayoría son ejercicios de rutina, por lo que se clasifica en la categoría de mecanicista. Asignándose entonces el par (A, M) a este texto.

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Es en la sexta unidad “Potencias y Raíces”, donde aparecen los radicales como objeto de estudio, y donde se le destinan 22 de las 472 páginas del libro, esto es, aproximadamente la novena parte del libro, equivalente al 4%.

Los radicales son introducidos en esta Unidad, desarrollada bajo la siguiente organización:

- Contenidos Unidad “*Potencias y Raíces*”:
 - Potencias.
 - Propiedades de las potencias.
 - Ecuaciones exponenciales.
 - Raíces.
 - Propiedades.
 - Racionalización.

- Ecuaciones irracionales.

Los radicales aparecen también en las otras unidades, a modo de aplicación, como una herramienta a utilizar, pero en otros ámbitos, como por ejemplo, en parte de la unidad de “Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado”, y en la unidad de “Números complejos”, que se trabaja a nivel general.

<ul style="list-style-type: none">• MACT4: Presentación de los Radicales.
--

La presentación de los radicales se comprende mejor al mirar la secuencia de temas desarrollados, los que son especificados a continuación:

- Potencias.

Lo que los autores realizan, en esta parte del texto, corresponde a la entrega de una definición de potencias de exponente natural, señalando cada una de las partes que la componen, haciendo cuestionable el hecho que se defina que $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (*n veces*) y no (*n factores*), e inmediatamente después presenta las potencias de exponente cero y exponente entero negativo, incluyendo ejemplos y ejercicios.

- Propiedades de las potencias.

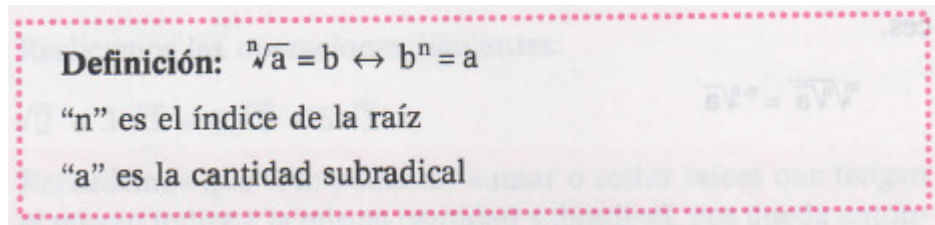
La intención que entregan los autores es presentar en forma secuencial las propiedades de las potencias, incluyendo ejemplos y ejercicios.

- Ecuaciones exponenciales.

Entregan el concepto de ecuación exponencial, mencionando los pasos de su resolución mediante cuatro ejemplos desarrollados, continuando con un listado de ejercicios.

○ Raíces.

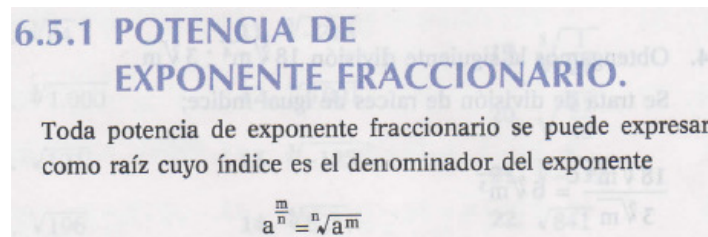
La presentación que realizan los autores acerca de los radicales, en la página 293, como objeto de estudio, comienza con la entrega de la siguiente definición:



Luego continúa con unas observaciones, en donde se analizan algunas restricciones que sitúan a los radicales de exponente par, tanto en el conjunto de los números reales, como en el conjunto de los números complejos.

○ Propiedades.

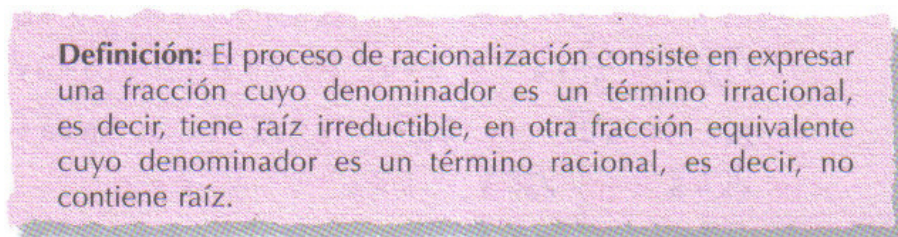
Comienza con potencias de exponente fraccionario, de la siguiente forma:



Luego continúa con la presentación de tres propiedades, las cuales no incluyen demostración alguna, careciendo además de toda restricción para las expresiones que emplea, seguidas de ocho ejemplos y una lista de ejercicios.

○ Racionalización.

Entrega el concepto mediante la siguiente definición.



Continuando luego con técnicas de racionalización, en donde muestran dos casos que para los autores son los más frecuentes: $\frac{A}{\sqrt[n]{P^r}}$, ($r < n$) y $\frac{A}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}}$, seguidos de ejemplos y una lista de ejercicios.

○ Ecuaciones irracionales.

Como es la temática de los autores en este compendio, comienza esta parte de la unidad con una definición, seguido de ejercicios desarrollados y un listado de ejercicios por resolver.

Termina la unidad, con una Prueba de selección múltiple, en donde se pide que marque la alternativa correcta, contiene 60 preguntas, cada una de ellas presenta cinco alternativas. Finalizando con un solucionario, en donde entregan la alternativa correcta.

• **MACT5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

El tratamiento de las propiedades comienza en la página 293 con la continuación de los temas que ya describimos en el campo anterior (MACT4).

Los autores en cada capítulo y en cada subtema, al inicio, entregan una definición, en este caso correspondiente según ellos a raíces.

Definición: $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$
 “n” es el índice de la raíz
 “a” es la cantidad subradical

Observaciones:

1. Si $a > 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ representa un número real, es decir, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$.
2. Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ representa un número complejo, conjunto que estudiaremos más adelante.
 Es decir $a < 0$ y n es par $\rightarrow \sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$.
3. Las operaciones definidas para las raíces verifican las propiedades que se cumplen en los números reales (\mathbb{R}).

Las propiedades de los radicales que se presentan en el texto, son sólo cuatro, no son demostradas, y sólo las entregan unilateralmente.

Las antes mencionadas se secuencian en el siguiente orden que desarrollaremos aquí:

- Potencia de exponente fraccionario.
- Multiplicación de potencias de igual índice.
- División de raíces de igual índice.
- Raíz de una raíz.

De acuerdo a la definición y a las propiedades dadas por los autores, se supone que el alumno deberá sacar sus propias conclusiones cuando se tiene radicales pertenecientes tanto al conjunto de los números reales, como al conjunto de los números complejos. Además se supone que los autores no caen en el error del doble sino, al momento de trabajar con radicales como: $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$, etc., que son radicales de índice par y que tienen en cantidad subradical cuadrados perfectos, es decir, de acuerdo a las soluciones entregadas por los autores, se subentiende que $\sqrt{4} = 2$ y que no cometen el error de aceptar que $\sqrt{4} = \pm 2$. Por lo tanto carecen de todo formalismo, al dejar libremente todo tipo de análisis, incluyendo la omisión de la existencia del cero como cantidad subradical. No logrando de este modo la institucionalización de las propiedades.

<ul style="list-style-type: none">• MACt6: Aplicaciones del álgebra de radicales.
--

En este campo observaremos los contenidos que hacen que el objeto radicación, pase ser una herramienta. Estos son: Racionalización, Ecuaciones con radicales y la ecuación cuadrática.

- Una primera aplicación del álgebra de radicales aparece en la página 304, en la institucionalización de un modelo de racionalización, dando la siguiente definición.

Definición: El proceso de racionalización consiste en expresar una fracción cuyo denominador es un término irracional, es decir, tiene raíz irreducible, en otra fracción equivalente cuyo denominador es un término racional, es decir, no contiene raíz.

Continúa el análisis dando a conocer técnicas de racionalización, indicando que se verán los casos más frecuentes de racionalización: Denominador irracional monomio; y denominador binomio (de índice 2). Cabe hacer notar, que los autores no dan a entender que se puede racionalizar tanto los denominadores como numeradores, restringiendo así la visión de la utilidad de la racionalización. Otro punto importante es que no hay restricciones para los denominadores utilizados, dando a lugar la opción de que las cantidades subradicales sean cero, invalidando todo el estudio al admitir fracciones con denominador igual a cero, debido a que $\sqrt{0} = 0$.

- En una segunda aplicación tenemos a las Ecuaciones con radicales. Como es común en este compendio, los autores dan una definición, luego entregan tres ejemplos desarrollados, seguidos de una serie de ejercicios por desarrollar, con su respectivo solucionario. Cabe mencionar que se extrañan aquellos ejemplos de ecuaciones con radicales que no tienen solución, como también el que los autores no incluyan ejemplos en donde se vea el análisis que ameritan este tipo de ecuaciones. Además vemos que cae en el problema del concepto de irracional, con el sólo hecho de enunciarlas, mal utilizando el concepto, respecto del Saber Matemático. Se da así la confusión entre expresiones radicales y expresiones irracionales. Éstas últimas tal como se explicó en otra presentación se intersectan con las primeras, pero ninguna es subconjunto de la otra. La expresión \sqrt{a} con $a \geq 0$ será irracional sólo en el caso que a no se pueda escribir como fracción entre enteros.

Además en la presentación que hacen los autores, no indican que elevando al cuadrado a ambos lados se llega a una nueva ecuación, que es otra no equivalente a la primera.

- Un punto importante a destacar, es que, si especifican el porqué debe reemplazarse la o las soluciones obtenidas en la ecuación original, haciendo mención a que se pueden encontrar con soluciones denominadas extrañas o inadmisibles, que son aquellas que no satisfacen la igualdad dada inicialmente, indicando que éstas no son aceptadas como raíces de la ecuación, en el caso que haya resultado una ecuación de segundo grado.

- La última aplicación de los radicales que veremos está en la resolución de la ecuación cuadrática. En la página 215, se presenta la unidad con una pequeña explicación, exponiendo luego, soluciones de la ecuación por factorización, donde se trabaja con la propiedad de que $a \cdot b = 0$ y luego de una serie de ejemplos y ejercicios, trabajan solución de la ecuación cuadrática aplicando la fórmula general, en ningún momento se da la opción de caer en errores, ya que sólo se trabaja con la fórmula que permite encontrar las soluciones de cualquier tipo de ecuación de segundo grado.

6.2.6.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 6b.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

Este libro de texto lleva por título “Matemática III Plan Común”. Es un libro nacional de comercialización en el mercado particular.



• MIGt2: Datos de Autoría.

Cuatro son los autores de esta obra. Ellos son:

- Autor 1: Profesor de Matemática y Licenciado en Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Autor 2: Profesor de Estado en Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile y Analista de sistemas.
- Autor 3: Profesor de Estado en Matemática por la Universidad de Chile.
- Autor 4: Profesor de Estado en Matemática, por la Universidad de Chile.

Como se puede ver, los autores son todos profesores de matemáticas.

• MIGt3: Edición y tipo de obra.

Este libro está dirigido al tercer año de educación media con los contenidos propios del programa ministerial vigente (que data de 1981). Pertenece a la empresa editora Santillana S.A., una de las editoriales que predomina el mercado en venta de textos escolares. Por tal motivo es su inclusión en la muestra. La primera edición (que es aquí la expuesta) data de 1994 y es impresa en Chile por Antártica Quebecor S.A.

• MIGt4: Presentación física.

Este texto escolar se compone de 192 páginas blancas impresas a color en un formato de papel tamaño 21 cm por 28 cm.

6.2.6.2 Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 6b.**• MACt1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en 7 Capítulos.

Tabla 6.7. Organización temática del texto 6b.

Capítulo	Título	Descripción
I	Potencias y raíces en R.	Este capítulo trata las potencias de base real y exponente entero y la extensión a exponente racional. A partir de ahí, continua con las raíces de números reales, las propiedades de las operaciones con raíces, las técnicas más frecuentes de racionalización de denominadores y las ecuaciones irracionales.
II	Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.	En este capítulo estudia la resolución de ecuaciones cuadráticas, la naturaleza de las raíces de una ecuación y sus propiedades respecto de la suma y producto y ecuaciones que se reducen a las de tipo cuadrático.
III	Funciones e inequaciones cuadráticas.	Se estudia aquí las funciones cuadráticas y las características de su registro gráfico (ceros, máximo y mínimo, etc.). Luego se aborda la resolución de inequaciones de segundo grado.
IV	Proporcionalidad y semejanza.	Desde este capítulo se tiene el acercamiento geométrico. Comenzando por el concepto de proporcionalidad geométrica (de segmentos), y el concepto de semejanza aplicado a polígonos y en especial a los triángulos y se establece su relación con la congruencia.
V	División proporcional de segmentos.	Parte del teorema de Tales y lo aplica para la división de un segmento en n partes proporcionales, división interior y exterior de un trazo y la relación que existe entre las bisectrices de cualquier triángulo.
VI	Relaciones métricas en el triángulo rectángulo.	Se revisan los conceptos de proyección de segmentos, los teoremas de Euclides y Pitágoras para el triángulo rectángulo.
VII	Relaciones métricas en la circunferencia.	Corresponde a los teoremas que aparecen al momento de aplicar el concepto de semejanza a la circunferencia.

Vale mencionar que cada capítulo cierra con una sección que se llama “Ejercicios y problemas”.

- **MACT2: Tipo de Presentación.**

El tipo de presentación que trae este libro escolar es Axiomático ante la forma del discurso, pues suele dar un ejemplo para construir la institucionalización, lo que incurre en un grave error de tipo metodológico, pues no se puede dar un salto tan grande como el de verificar con un ejemplo y luego dar la formalidad de lo expuesto.

Es Mecanicista por el tipo de ejemplos y ejercicios, pues se hace notar que se prioriza por un plano instrumental.

• MACt3: Ecología de los radicales en el libro de texto.

La ecología queda bien descrita al citar cómo se organiza el interior del capítulo de examinación. Seis son las temáticas que aborda:

1. Potencias de base real y exponente entero, donde se revisan las propiedades de las potencias con este tipo de exponentes y se aplican para resolver ecuaciones exponenciales.
2. Potencias de base real y exponente racional. Si duda este es uno de los temas que trataré en el campo siguiente (MACt4), donde los autores pretenden dotar de significado a las expresiones $a^{\frac{1}{n}}$ y $a^{\frac{m}{n}}$.
3. Raíces de números reales. Aquí los autores exponen la expresión $b^n = p$ para dar significado a la potenciación, la radicación y la logaritmicación. Sin embargo, este no es un tratamiento algebraico sino aritmético.
4. Propiedades de las operaciones con raíces, tema que se examinará en detalle en el campo siguiente (MACt4).
5. Racionalización del denominador de una fracción y
6. Ecuaciones irracionales.

Estos últimos dos temas conforman las aplicaciones del álgebra de radicales y por tanto son descritos y analizados en el campo MACt6.

• MACt4: Presentación de los Radicales.

Los autores comienzan indicando qué entienden por las potencias de exponente racional (que dicho sea de paso, debiera por lo menos decir, raíces aritméticas), y realiza transformaciones no permitidas, pues presenta primero estas potencias y emplea las propiedades vistas anteriormente para dar significado a estos nuevos entes representados como potencia.

2. POTENCIAS DE BASE REAL Y EXPONENTE RACIONAL

2.1. Potencias de la forma $a^{\frac{1}{n}}$

Ejemplos

Consideremos las siguientes potencias.

- $16^{\frac{1}{2}}$

Para determinar su valor, aplicamos las propiedades de las potencias.

Sea $x = 16^{\frac{1}{2}}$

Elevamos al cuadrado: $x^2 = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^2$

$$x^2 = 16$$

Por lo tanto, x representa un número real que, elevado al cuadrado, es igual a 16. A este número, por definición, se le denomina **raíz cuadrada de 16** y se expresa de la forma:

$$x = \sqrt{16} \quad \text{Raíz principal}$$

$$x = 4$$

Luego: $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16^1} = 4$

En esta presentación, se observa que su contexto numérico es el de los reales positivos ya que toma la raíz principal, sin decir por qué aquella y no otra. También se advierte un error discursivo, cuando en singular señala “A este número...”, lo que es incorrecto pues el número real 16 tiene dos raíces cuadradas y no una. Se ve una confusión en el concepto de raíz utilizado aquí.

Nótese el recuadro de la derecha que aparece en la página 10, en el que correctamente expone la diferencia entre raíz como solución de una ecuación que como función. El signo radical está muy bien utilizado. Sin embargo,

También $x = -4$ es un valor que cumple la condición $x^2 = 16$; ya que $(-4)^2 = 16$.

A este valor se le llama **raíz secundaria** y se escribe: $-\sqrt{16} = -4$

Luego,

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm \sqrt{16}$$

Raíz principal

Raíz secundaria

$$+\sqrt{16} = +4$$

$$-\sqrt{16} = -4$$

avanzando en el texto, en página 35, el discurso claramente ofrece un error:

Toda raíz cuadrada de un número real $a \geq 0$, en términos algebraicos, admite dos valores:
 $+\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$

No es que toda raíz cuadrada admita dos valores, sino que cualquier número real positivo tiene dos raíces en \mathbb{R} . El cuadro de la derecha en términos simbólicos es:

$$\sqrt{a} = \pm\sqrt{a} , \text{ lo que es una contradicción.}$$

En el tratamiento de las potencias de exponente racional, no se manifiestan las restricciones para la base. Más aún, el título del apartado n°2 que estamos analizando es “Potencias de base real y exponente racional”, lo que debiera restringirse a “Potencias de base real positiva y exponente racional”. Se tiene aquí otra ruptura con el Saber Matemático.

Tampoco se aprecian estos cuidados en los momentos de institucionalización, a los que llega después de mostrar ejemplos particulares. Se favorece así a otro fenómeno muy conocido: El error de establecer generalizaciones a partir de unos pocos casos particulares. Después de tales ejemplos llega a exponer que:

<p>En general:</p> $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} ; n \in \mathbb{N}$ <p>Lo que se lee: Raíz enésima de a.</p>	<p>En general:</p> $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} ; n \neq 0$ <p>Lo que se lee: Raíz enésima de a elevada a m.</p>
---	--

En ambos casos no se dan las restricciones para a y además la lectura es errónea, pues no se trata de la raíz enésima de a , sino de la raíz enésima principal o aritmética de a , o bien el radical de a .

En la misma página 11 en que aparecen las pseudo – institucionalizaciones que acabo de examinar, hay otro cuadro preocupante:

Observa que:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Sin indicar el ámbito numérico de los literales, se presenta esta igualdad entre dos expresiones que en rigor no son iguales.

Es sencillo encontrar un contraejemplo, para lo cual si hacemos $a = -3$, $n = 2$ y $m = 2$. A la izquierda se tiene un número real $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, mientras que a la derecha, no se tiene un real, sino un imaginario puro: $(\sqrt{-3})^2 = (i\sqrt{3})^2 = i^2 \cdot 3 = -3$.

Al continuar con la revisión del texto, en la página 12, se encuentra otro elemento que puede favorecer a la confusión. Bajo el apartado 3 denominado “Raíces de números reales”, se analiza el significado de la expresión $b^n = p$, de donde conocidos dos de los literales y asumiendo el tercero como incógnita, se desprenden las operaciones de potenciación, radicación y logaritmación (en palabras del libro de texto). Del desarrollo destaco el siguiente extracto:

- Si se desconoce **b**, consideramos **b = x**.
La expresión queda de la forma

$$x^n = p$$

Esto da origen a la **radicación**.
Para determinar el valor de **x** debemos calcular la raíz enésima de **p**,
es decir, $x = \sqrt[n]{p}$

Ante todo, llama la atención que la incógnita tenga que ser x . Surge la interrogante, ¿sólo esa letra puede ser la incógnita?. Esto también acarrea problemas, pues aunque no estoy en condiciones de afirmarlo teóricamente, si recuerdo a nivel empírico que algunos estudiantes suelen manipular expresiones en que deben hacer reducciones como en $x + 3 + 2x - 4$ y terminaban encontrando un valor para x como si estuvieran resolviendo una ecuación, y claro, se debía a la costumbre de trabajar esta

letra en las ecuaciones, por tanto, dicho de otro modo, cuando aparecía x era señal de encontrar su valor.

Volviendo al extracto, en él se indica que para resolver la ecuación que allí queda planteada, “se debe calcular la raíz enésima de p ”, lo que tiene al menos dos errores:

- 1) La ecuación para x , $x^n = p$ tiene n soluciones en \mathbb{C} , siguiendo el Teorema Fundamental del Álgebra. En \mathbb{R} que es donde se trabaja en el libro, tendrá una y sólo una y que es efectivamente $x = \sqrt[n]{p}$, siempre que n sea impar. Pero si n es par, se tendrán dos soluciones siempre que además sea $p > 0$ y que corresponden a $x_1 = \sqrt[n]{p}$ y $x_2 = -\sqrt[n]{p}$.
- 2) En la ecuación $x^n = p$, los valores de x que la satisfacen son las raíces enésimas de p , de las cuáles hay una y sólo una que se anota con el signo radical que corresponde a la raíz aritmética o principal según el saber erudito de referencia.

<ul style="list-style-type: none"> • MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.
--

Las propiedades de los radicales aparecen entre las páginas 15 a 20. En una primera mirada, he detectado que la presentación para cada una de las propiedades que se exponen sigue la misma ruta, la que indicaré con los siguientes ordinales:

1. Muestra un ejemplo o caso particular (al menos uno).
2. Desarrolla una pseudo - demostración (en casi todos los casos), apoyada en las propiedades de las potencias, puesto que toma como base la escritura de potencia con exponente racional para los radicales.
3. Propone ejercicios.

Comienzo con el extracto de la primera propiedad:

4.1. Multiplicación de raíces de igual índice

Ejemplo

- Analicemos el desarrollo de la siguiente multiplicación.

$$\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{7} = 6^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{5}} = (6 \cdot 7)^{\frac{1}{5}} = 42^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{42}$$

En general: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Esta propiedad se expresa como sigue:

La multiplicación de raíces de igual índice n es igual a la raíz enésima del producto de las cantidades subradicales.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+$, si n es par y $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si n es impar

Recuerda que:
 $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

Como lo adelanté, da un ejemplo, y luego repite con literales (a modo de demostración), el proceso seguido. La propiedad aparece con sus restricciones completas, pero la demostración posee errores lógicos. No hay mención alguna en la extensión que se ha realizado, ni de los supuestos que permiten fijar tal extensión.

Esta propiedad es tratada unilateralmente, ya que luego aflora la “Raíz de un producto”:

En general: $\sqrt[n]{ab} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Esta propiedad se expresa como sigue:

La raíz enésima de un producto de dos o más factores es igual al producto de las raíces enésimas de cada factor.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Aplica estas “dos” propiedades, que en realidad son una sola (y que tampoco se indica), para presentar otras “dos” propiedades que también son sólo una. La primera

tiene la etiqueta de “Forma típica de una raíz”, que es la descomposición $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$, sin restricción alguna y que cuenta con dos ejemplos desarrollados. Tampoco la demuestra.

Igualmente sucede con “Introducir el coeficiente de una raíz como factor de la cantidad subradical”, que es la misma que la anterior, leída en el sentido contrario (en la concepción de relación simétrica de la igualdad).

Los listados de ejercicios no traen ningún tipo de restricción cuando hay literales.

En las páginas 17 y 18 respectivamente, está la “División de raíces de igual índice” y “Raíz de un cociente”. Igualmente se comprueba la falta de restricciones, la unilateralidad con que son expuestas y las pseudo - demostraciones.

En la página 19 se tienen las últimas propiedades, la primera es:

4.5. Raíz de una raíz

Ejemplos

$$\bullet \sqrt[5]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[5]{3^{\frac{1}{4}}} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{3} \quad \bullet \sqrt[7]{a \sqrt[3]{b}} = \sqrt[7]{\sqrt[3]{a^3 \cdot b}} = \sqrt[21]{a^3 b}$$

En general: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Esta propiedad se expresa como sigue:

La raíz **emésima** de una raíz **enésima** es equivalente a una raíz cuyo índice es el producto **m · n**.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Esta propiedad también es válida para dos o más raíces de una raíz:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot p]{a}$$

Recuerda que:

- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Nuevamente sin restringir, y con una demostración errónea. Se apela en un cuadro izquierdo a la memoria de los lectores, sobre la propiedad de potencias: $(a^m)^n = (a^n)^m$, que sólo es verdadera para la base positiva, de modo de ser generalizable para exponentes racionales.

El listado de ejercicios comprende números y letras, nada se dice del contexto numérico de los literales. Se reafirma el sentido instrumental ya que la serie de ejercicios que se van dando en cada bloque son de aplicaciones de las propiedades vistas.

La última propiedad que aparece en la misma página 19, ya al final de ésta, es la que titula “Cambio del índice de una raíz”. Los autores han llamado en todo el texto como raíces a las expresiones que utilizan $\sqrt{\quad}$ en su notación. No emplean el concepto de radical.

En esta última propiedad, como en las anteriores, no hay restricciones. Establece que como las raíces se pueden escribir en forma de potencia con exponente racional $\frac{m}{n}$, es siempre posible amplificar esta fracción o simplificar en algunos casos lo que permite transformar el exponente de la potencia y por tanto, cambiar el índice de la raíz. En tal discurso, se tienen al menos dos problemas:

- 1) No se indica que el radical que se obtiene es equivalente al primero.
- 2) Que se obtendrá un radical equivalente siempre que la base de la potencia sea un número positivo y distinto de 1, restricción que responde a la función exponencial que entra en juego cuando se desea conectar el concepto de radical como un caso especial de la función $y = a^x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$.

Por amplificación	Por simplificación
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$	$\sqrt[n \cdot q]{a^{m \cdot n}} = a^{\frac{m \cdot n}{n \cdot q}} = \sqrt[q]{a^m}$

No hay ningún tipo de restricción para a, m, n, p, q . Cito nuevamente el error que es posible incurrir con este tipo de discurso:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Al lado derecho del extracto que he ilustrado, se indica que n, p y q deben representar números distintos de cero, lo que sólo asegura poder amplificar o simplificar y que se esté trabajando con fracciones (existentes) sin embargo no se completa con las condiciones para a , que es clave para el permiso de efectuar las transformaciones.

• **MACt6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Tres son las aplicaciones que trae este libro de texto: Racionalización, ecuaciones cuadráticas y ecuaciones con radicales.

La Racionalización es tratada con bastante amplitud y la aplica sólo para denominadores. Justifica este proceso en términos de la dificultad que ofrece operar fracciones con denominadores racionales que con denominadores irracionales, sin mostrar ejemplo alguno de la dificultad a la que hace alusión.

Las únicas restricciones que da, son para evitar denominadores nulos, por ejemplo, institucionaliza la primera técnica del modo siguiente:

$$\frac{p}{\sqrt{a}} = \frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{p\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{p\sqrt{a}}{a} \quad ; \quad p \in \mathbf{R}; a \neq 0$$

Llama la atención que sólo se permita $a \neq 0$, pues si trabaja en \mathbf{R} , debiera decir $a > 0$.

Presenta luego de ésta, otras las técnicas de racionalización para denominadores de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}$, $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ y finalmente combinaciones de éstas. El capítulo examinado termina con una breve exposición de las Ecuaciones Irracionales, entendiendo por éstas como aquellas en las que intervienen raíces y cuya incógnita forma parte de la cantidad subradical. En este sentido, se ve claramente que el concepto de irracional lo relaciona con el de raíz (en rigor radical), pero no se observa claridad respecto de la notación radical que no siempre conlleva al concepto de número irracional.

En cuanto al método de resolución señala en página 53:

En algunos casos, al elevar una ecuación irracional al cuadrado o a una potencia par, esta se transforma en otra, tal que una de sus soluciones **no satisface la ecuación irracional original**. Dicha solución, a la que se denomina **ajena o extraña a la ecuación**, debe descartarse. Por tal motivo siempre las soluciones o raíces de la ecuación final deben **comprobarse en la ecuación original**.

No se pone cuidado en detallar este principal hecho, que no produce pasos reversibles como cuando se suma o multiplica a cada lado de una ecuación. Si bien es cierto que $a = b$ produce que $a^2 = b^2$, no es cierto que de $a^2 = b^2$ se obtenga unívocamente $a = b$, lo que en una concepción de matemática instrumental no cabe, pero si en la razonable.

A pesar que comprueba las soluciones como ha de ser, es el fundamento de por qué se debe comprobar el que es tratado ligeramente y propicia entonces el mecanicismo.

La última aplicación de tipo algebraica (pues también las hay geométricas y que no veremos por derivarse en situaciones aritméticas que no interesan en esta

investigación), es en la que los radicales aparecen como herramienta para la resolución de ecuaciones cuadráticas.

En la página 35 se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \text{Luego, } & x^2 + 6x = -5 \quad / +9 \quad (\text{prop. aditiva de la igualdad}) \\ & x^2 + 6x + 9 = -5 + 9 \\ & \underbrace{(x + 3)^2}_{=} = 4 \quad / \sqrt{\quad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } & x + 3 = +\sqrt{4} \Rightarrow x + 3 = 2 \Rightarrow x_1 = -1 \\ & x + 3 = -\sqrt{4} \Rightarrow x + 3 = -2 \Rightarrow x_2 = -5 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Raíces o soluciones} \\ \text{de la ecuación} \end{array} \right\}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\mathbf{S = \{-1, -5\}}$.

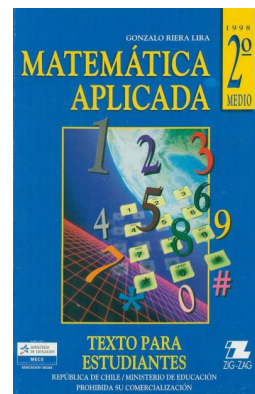
Los autores presentan el concepto de raíz ahora vinculado a las soluciones de una ecuación. Por otra parte, así como anota seguido de un / que sumará 9 a cada lado, paso que es reversible, hace lo mismo luego al escribir $/\sqrt{\quad}$, indicando la extracción de raíz cuadrada, lo que constituye un error conceptual, pues el empleo del operador radical no es reversible.

De la misma forma se observa más adelante trabaja con otras ecuaciones y deduce la fórmula general para la ecuación general de segundo grado.

6.2.7.1 Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 7b.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

Este es un libro de texto nacional que se titula “Matemática Aplicada” 2° año medio y es de distribución gratuita por ser el texto oficial licitado por el Ministerio de Educación.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

El equipo de autoría cuenta con 1 autor principal y 3 colaboradores. El autor que designaré por 7b es Profesor de Matemática y Doctor en Matemática, mientras que entre sus colaboradores están dos doctores en matemáticas y un Profesor y Licenciado en Física.

- **MIGt3: Edición y tipo de obra.**

Es un libro de texto para el nivel de segundo año de enseñanza media. Se trata del primer texto de matemáticas licitado por el gobierno en el que se encuentra una multiplicidad de temas que obedecen a un currículo transitorio, pero hemos incluido en este período y no en el de la última reforma propiamente tal, ya que aún el año 1998 cuando es distribuido, no se alcanza a poner en marcha el programa que para tercer año contempla el álgebra de radicales. La edición revisada es la primera y pertenece a la empresa editora Zig-Zag. Impreso por Cochrane S.A. terminada de imprimir en diciembre de 1997.

- **MIGt4: Presentación física.**

El texto se compone de 352 páginas a color negro y tonalidades de azul. Las dimensiones de sus hojas son de 21 cm por 27 cm.

6.2.7.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 7b.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en 8 Unidades que se describen la siguiente tabla:

Tabla 6.8. Organización temática del texto 7b.

Unidad	Nombre	Descripción
1	El universo de los números	Contiene aplicaciones de las potencias de exponente entero, tales como la notación científica, grandes y pequeñas cantidades, y el estudio de sus propiedades.
2	Estructuras de la Naturaleza	Da una mirada a la presencia de la geometría en la naturaleza, otro estudia la raíz cuadrada, el teorema de Pitágoras, perímetro y área del triángulo equilátero, experimenta con papel y tijeras los temas anteriores y las relaciones entre paralelogramos y finaliza con la historia de Pitágoras.
3	La conquista del espacio y el Álgebra	Comienza con un vistazo a conceptos físicos del movimiento como aceleración, velocidad, caída libre y menciona las leyes de Newton. Luego expone elementos del álgebra inicial: productos y factorizaciones, resolución de ecuaciones por factorización y completación de cuadrados, pasa por la historia del álgebra y finaliza con la los registros gráficos y de tabla para resolver ecuaciones, además de la manipulación de fórmulas.
4	Un mundo de proporciones	Contempla los contenidos de razón áurea, elaboración de planos y dibujos a escala, teorema de Thales, relaciones de perímetros, áreas y volúmenes en figuras semejantes, culminando en la semejanza de triángulos.
5	Modelos lineales: la línea recta	Estudia la noción de recta de regresión, la ecuación de la recta, modelos matemáticos definidos por funciones lineales y ecuaciones y sistema de ecuaciones lineales.
6	Simplifiquemos la vida: polinomios	Inicia la unidad con aplicaciones de las matemáticas a problemas de la vida diaria (la mosca de la fruta, la cadena de compras, etc.), pasando luego al estudio de los polinomios y su operatoria. Continúa con las funciones racionales (más precisamente fracciones algebraicas en el lenguaje escolar), y termina con aplicaciones a la manipulación de fórmulas en geometría y en física.
7	Sin perderse el camino	Estudia nociones de la geometría de la esfera (meridianos y paralelos, longitud y latitud), los movimientos de la Tierra, el círculo, sus elementos y medición de éstos, la presencia del círculo en el arte hasta finalizar con área y volumen de los cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera.
8	Pensar y tomar decisiones	Este capítulo está dedicado al estudio de la estadística descriptiva y nociones de probabilidad. Aparecen conceptos elementales de población, muestra, distribución de frecuencias, algunas medidas de tendencia central y otras de posición; y el concepto de azar y probabilidad.

Por las temáticas abordadas, este libro de texto se escapa fuera de lo común. Contiene una buena cantidad de aplicaciones del mundo de las ciencias y también de la realidad, pero carece de un hilo conductor. Cabe señalar que este libro posee estas características pues se instala como uno de los cuatro libros de enseñanza media (uno para cada nivel) del mismo autor y misma editorial que son distribuidos como el texto oficial de estudio con la garantía ministerial, en una etapa de transición de los programas

y por tanto, se produce un alejamiento de los contenidos de los programas de este período con los del libro de texto¹ y al mismo tiempo se encuentra en plena elaboración los programas nuevos del ciclo secundario.

• **MACT2: Tipo de Presentación.**

La presentación de los contenidos es Axiomática, pese a la enorme cantidad de aplicaciones a la vida diaria que podría pensarse lo contrario, sin embargo, en lo estricto, se acerca esta categoría puesto que da las definiciones al inicio en la mayoría de los casos, incluso en demostraciones. Luego vienen los ejercicios propuestos que toman un fin instrumental, siendo en poca cantidad, de igual modo se trata de aplicar reglas. En este sentido se le asigna la categoría de Mecanicista, lo que da origen al par (A, M) para caracterizar su tipo de presentación.

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

El texto ubica el estudio de los radicales en la Unidad II “Estructuras de la Naturaleza”, cuyo segundo apartado es La raíz cuadrada, la que se expone entre las páginas 56 y 63, aproximadamente un 3% del texto completo. En tal lugar se desarrollan las temáticas siguientes:

- 1) Cálculo de raíces cuadradas
- 2) Propiedades de la raíz cuadrada
- 3) Gráfica de la función raíz cuadrada

Posteriormente aparecen algunas aplicaciones como el Teorema de Pitágoras (páginas 64 a 75 que como ámbito geométrico no es de interés para esta investigación), y luego en la Unidad III en un apartado titulado “Ecuaciones”, donde aparece el concepto general de raíz en su acepción de solución de una ecuación y algunas ecuaciones con radicales.

¹ En efecto, los radicales son materia de estudio según el programa vigente en 3° año medio, y esta colección de textos lo incorpora en 2°.

- **MACT4: Presentación de los Radicales.**

Los radicales aparecen tratados sólo con orden dos, es decir, como raíz cuadrada positiva, la que aparece en la página 56, cuya presentación se construye a partir del cálculo inverso de cuadrados.

La *raíz cuadrada* es la operación inversa a la que se realiza para calcular el cuadrado de un número *positivo* y para representarla se usa el símbolo $\sqrt{\quad}$.

*La raíz cuadrada de un número positivo es siempre un número positivo.
La raíz cuadrada de un número negativo no existe en los números reales.*

En el recuadro se aprovecha de dar las restricciones completas del objeto raíz cuadrada positiva, aunque no la enuncia de esta forma, sólo como raíz cuadrada a la que más tarde en página 59, le da estatus de función.

Volviendo a la página 56, se observa el siguiente cuadro:

Para dos números positivos b y a ,
 $b^2 = a$ es equivalente a $b = \sqrt{a}$.

Enfatiza las restricciones para utilizar el signo radical correctamente. No da lugar al error del doble signo, al punto que muestra una situación que no es reversible a menos que se trabaje en los reales positivos. Tanto es así que incorpora en la página siguiente, la número 57, el siguiente ejemplo:

Sabiendo que la raíz siempre dará un resultado positivo, comprobemos si se cumplen algunas igualdades.

$$\sqrt{\left(2 - \frac{9}{4}\right)^2} \stackrel{?}{=} 2 - \frac{9}{4}$$

Como $2 = \frac{8}{4}$, entonces el resultado de $2 - \frac{9}{4}$ será negativo, y el signo $\sqrt{\quad}$ tiene sentido sólo en números positivos, luego, la igualdad es *FALSA*.

• Comprueba que las afirmaciones:
 $\sqrt{a^2} = a$ y $(\sqrt{a})^2 = a$ son verdaderas sólo si $a \geq 0$.

Se observa que hay real interés en que no se cometan errores conceptuales. En la página 61 da una intervención sobre el valor absoluto, lo que le permite al autor indicar que $|a| = \sqrt{a^2}$.

• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

Tres son las propiedades que enuncia: Producto de raíces, cociente de raíces y lo que llama simplificación de raíces, más conocido como la descomposición numérica.

He aquí la primera:

Producto de raíces

Para dos números *positivos* a y b se tiene:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Demostración

Por definición \sqrt{ab} es el único número positivo tal que su cuadrado sea ab .

Pero:

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} \sqrt{b})^2 &= \sqrt{a} \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} \sqrt{b} \\ &= (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la igualdad.

Comienza dando las restricciones para cada literal, y luego demuestra en forma correcta, con una secuenciación similar en base a propiedades de potencias de exponente natural, sin incurrir en errores lógicos en este sentido. Se observa aquí una demostración alternativa que no requiere del empleo de la definición de radical.

En seguida, da la propiedad de cociente de raíces para el caso de las cuadradas y deja al lector la tarea de demostrar con la indicación que proceda de igual forma que en la demostración anterior, lo que es válido.

Cociente de raíces

Para dos números *positivos* a y b se tiene:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Para demostrarlo, calcula $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ y procede como en la demostración anterior.

Por otra parte, las restricciones siempre están presentes.

Una tercera propiedad es la última propiedad que se enuncia en el libro de texto es la que llama “simplificación de raíces”, que también expone sólo en el caso particular de la raíz cuadrada (positiva) en la página 58.

Para dos números *positivos* a y b se cumple:

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

Demostración

$$\begin{aligned} (a\sqrt{b})^2 &= a\sqrt{b} \cdot a\sqrt{b} \\ &= a^2 (\sqrt{b})^2 \\ &= a^2 b \end{aligned}$$

Intenta otra forma de hacer la demostración, partiendo de $\sqrt{a^2} = a$.

Demuestra que no se cumple si a es negativo.

En este tratamiento se puede apreciar que no deja de dar los campos de validez para los literales a y b , de modo que no hay lugar a errores por omisión de información en su formulación, es decir, aborda en forma completa las restricciones de la propiedad. La demostración por su parte también es correcta, y es más aún, da la misión al destinatario que verifique que para $a < 0$ la propiedad no se satisface.

Hasta aquí es el estudio de los teoremas de los radicales, los cuáles los enuncia bidireccionados. La continuación del texto trae la función raíz cuadrada, su representación gráfica y algunos de sus elementos en tabla, donde se valida que el dominio y recorrido corresponde a los números reales no negativos.

• **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Dos son las aplicaciones que se tienen de los radicales en este texto: La resolución de ecuaciones cuadráticas y las ecuaciones con radicales. Las primeras son resueltas mediante métodos de factorización y no incurre en ningún error. Es ahí donde explicita el concepto de raíz como solución de una ecuación. En efecto señala:

“Resolver una ecuación significa encontrar los valores que reemplazados en la letra x , dan una igualdad. A estos valores se les llama raíces de la ecuación” (p.103).

Comentario: El problema que puede generar esto, está en que no se establece la diferencia cuando se habla de raíz en el sentido de radical y de raíz en el sentido de solución de una ecuación. Podría salvarse esta situación si en algún lugar se precisara la diferencia entre la expresión $x^n = y$, en que x toma por valor todos los números que son radicales n – ésimos, en cambio $x = \sqrt[n]{y}$ es UNA de tales raíces, la positiva para el caso en que n es par y la de igual signo que y si n es impar.

Las ecuaciones con radicales en tanto se presentan en la página 109. La expuesta y desarrollada completamente es la que cito a continuación:

1. Transformación a ecuación
 Resolver $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = 4$

Solución: Elevando al cuadrado se tiene:

$$(x-3) + 2\sqrt{x-3}\sqrt{2x+1} + (2x+1) = 16$$

⇒ Restemos $2x - 3x$.

$$2\sqrt{x-3}\sqrt{2x+1} = 18 - 3x$$

⇒ Elevemos al cuadrado.

$$4(x-3)(2x+1) = 324 - 108x + 9x^2$$

$$8x^2 - 20x - 12 = 324 - 108x + 9x^2$$

⇒ Restemos $8x^2 - 20x - 13$.

$$x^2 - 88x + 336 = 0$$

⇒ Factoricemos.

$$(x-4)(x-84) = 0$$

⇒ Luego las raíces son:
 $x = 4$ y $x = 84$.

Como se elevó al cuadrado, se debe verificar cuál de ellas satisface la ecuación inicial. A veces solo una la satisface.

$$\sqrt{4-3} + \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 1 + 3 = 4$$

$$\sqrt{84-3} + \sqrt{2 \cdot 84 + 1} = \sqrt{81} + \sqrt{169} = 9 + 13 = 22 > 4$$

Luego, la solución de la ecuación: $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = 4$ es $x = 4$.

En el recuadro inferior izquierdo, se intenta dar una explicación para comprender por qué se debe comprobar la solución, pero es muy insuficiente. Elevar al cuadrado conduce a otra ecuación que contiene a la primera, pero esto no ha sido detallado. Se cataloga como muy débil la justificación. Se persigue según el discurso un desarrollo instrumental, pues no hay más instancias para este tema en todo el libro. Se llega así a la página 114, en que se dan 6 ecuaciones con radicales para resolver.

6.3. Síntesis del capítulo.

Como balance de este capítulo, presentaré en primer lugar la matriz de resumen y cotejo (Mr) para determinar el Perfil del Saber a Enseñar propuesto en los libros de texto de este período. Luego enfatizaré algunos elementos para la reflexión como lo son los sistemas de Representación utilizados, algunos fenómenos didácticos acaecidos, los tipos de actividades propuestas: Ejercicios, problemas, demostraciones, y los errores (conceptuales, procedimentales, entre otros) que emerjan.

Tabla 6.9. Matriz de resumen y cotejo aplicada a los libros de texto período 1982 – 2000

Campos, aspectos y sub – aspectos		Período 1982 - 2000							
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Libro 5	Libro 6	Libro 7	
1. Vigencia de la fuente		83	84	85	89	93	94	97	
2. Nivel de enseñanza media		3°	3°	3°	3°	---	3°	2°	
3. Uso del signo radical	1.1 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama raíces	X	X	X	X	X	X	X	
	2.2 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama radicales	X							
	3.3 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama irracionales		X		X		X		
	3.4 Comete el error del doble signo (por ejemplo, $\sqrt{4} = \pm 2$)	X	X	X	X				
	3.5 Lo usa con restricciones sólo para el radicando (dominio)				X				
	3.6 Lo usa con restricciones de dominio y recorrido					X	X	X	
4. Introducción al concepto	4.1 Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)	X	X	X	X	X	X	X	
	4.2 Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)							X	
	4.3 Como inversa de la potenciación	X	X	X	X	X	X	X	
	4.4 Como potencia de exponente fraccionario (o racional)	X		X		X	X		
	4.5 Otro (especificar al final de la parrilla)								
5. Tipos de representaciones que utiliza	5.1 Con el signo radical	X	X	X	X	X	X	X	
	5.2 Con uso de valor absoluto							X	
	5.3 Con notación de potencia (exp. fraccionario)	X	X	X	X	X	X		
	5.4 Notación funcional							X	
	5.5 Otro (especificar a continuación de la parrilla)								
6. Propiedades de los radicales	6.1 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	6.1.1 La demuestra con errores lógicos	X	X	X	NI	NI	X	NI
		6.1.2 La demuestra correctamente				NI	NI		NI
		6.1.3 No demuestra				NI	NI		NI
		6.1.4 Usa restricciones completas	X			NI	NI		NI
		6.1.5 Usa restricciones incompletas				NI	NI		NI

		6.1.6 No restringe		X	X	NI	NI	X	NI
		6.1.7 Define unilateralmente				NI	NI		NI
		6.1.8 Define bilateralmente	X	X	X	NI	NI	X	NI
	6.2 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	6.2.1 La muestra con errores lógicos	X	X	X			X	
		6.2.2 La muestra correctamente				X			X
		6.2.3 No muestra					X		
		6.2.4 Usa restricciones completas			X			X	X
		6.2.5 Usa restricciones incompletas							
		6.2.6 No restringe		X	X		X	X	
		6.2.7 Define unilateralmente		X	X	X	X	X	
		6.2.8 Define bilateralmente	X						X
		6.3 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	6.3.1 La muestra con errores lógicos		X		NI	NI	
	6.3.2 La muestra correctamente					NI	NI		NI
	6.3.3 No muestra		X		X	NI	NI	X	NI
	6.3.4 Usa restricciones completas					NI	NI		NI
	6.3.5 Usa restricciones incompletas					NI	NI		NI
	6.3.6 No restringe		X	X	X	NI	NI	X	NI
	6.3.7 Define unilateralmente					NI	NI		NI
	6.3.8 Define bilateralmente		X	X	X	NI	NI	X	NI
	6.4 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a : b}$	6.4.1 La muestra con errores lógicos	X	X	X			X	
		6.4.2 La muestra correctamente				X			
		6.4.3 No muestra					X		X
		6.4.4 Usa restricciones completas	X						X
		6.4.5 Usa restricciones incompletas						X	
		6.4.6 No restringe		X	X	X	X		
		6.4.7 Define unilateralmente	X		X	X	X	X	
		6.4.8 Define bilateralmente		X					X
	6.5 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$	6.5.1 La muestra con errores lógicos				NI	NI		NI
6.5.2 La muestra correctamente					NI	NI		NI	
6.5.3 No muestra		X	X	X	NI	NI	X	NI	
6.5.4 Usa restricciones completas					NI	NI		NI	
6.5.5 Usa restricciones incompletas					NI	NI		NI	
6.5.6 No restringe		X	X	X	NI	NI	X	NI	
6.5.7 Define unilateralmente					NI	NI	NI	NI	
6.5.8 Define bilateralmente		X	X	X	NI	NI	NI	NI	
6.6 $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	6.6.1 La muestra con errores lógicos	X	X	X	X		X	NI	
	6.6.2 La muestra correctamente	X						NI	
	6.6.3 No muestra							NI	
	6.6.4 Usa restricciones completas							NI	
	6.6.5 Usa restricciones incompletas							NI	
	6.6.6 No restringe		X	X	X	X	X	NI	
	6.6.7 Define unilateralmente			X		X		NI	

7. Aplicaciones de los radicales	6.7 $\sqrt[n]{a^n} = a$	6.6.8 Define bilateralmente	X	X		X		X	NI
		6.7.1 La demuestra con errores lógicos	X	X			NI		
		6.7.2 La demuestra correctamente					NI		X
		6.7.3 No demuestra			X	X	NI	X	
		6.7.4 Usa restricciones completas	X				NI		X
		6.7.5 Usa restricciones incompletas					NI		
		6.7.6 No restringe		X	X	X	NI	X	
		6.7.7 Define unilateralmente					NI		
	6.7.8 Define bilateralmente	X	X	X	X	NI	X	X	
	6.8 $(\sqrt[n]{a})^n = a$	6.8.1 La demuestra con errores lógicos	X	X			NI		
		6.8.2 La demuestra correctamente					NI		X
		6.8.3 No demuestra			X	X	NI	X	
		6.8.4 Usa restricciones completas	X				NI		X
		6.8.5 Usa restricciones incompletas					NI		
		6.8.6 No restringe		X	X	X	NI	X	
		6.8.7 Define unilateralmente					NI		
		6.8.8 Define bilateralmente	X	X	X	X	NI	X	X
	6.9 $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	6.9.1 La demuestra con errores lógicos					NI		
		6.9.2 La demuestra correctamente	X	X			NI		X
		6.9.3 No demuestra			X	X	NI	X	
		6.9.4 Usa restricciones completas	X				NI		X
		6.9.5 Usa restricciones incompletas					NI		
		6.9.6 No restringe		X	X	X	NI	X	
		6.9.7 Define unilateralmente					NI		
		6.9.8 Define bilateralmente	X	X	X	X	NI	X	X
	7.1 Racionalización	7.1.1 Sólo de denominadores	X	X		X	X	X	NI
		7.1.2 De numeradores y denominadores			X				NI
		7.1.3 Restringe							NI
7.2 Ecuaciones cuadráticas		7.2.1 Conduce al error $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a} = \pm b$		X					
		7.2.2 Establece correctamente que $x^2 = a$, entonces, $x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$	X			X		X	X
		7.2.3 Restringe					X		X
7.3 Ecuaciones con radicales		7.3.1 Explica sobre transformaciones algebraicas no equivalentes				X	NI	X	
		7.3.2 Comprueba las soluciones y selecciona sólo las que corresponden	X		X	X	NI		X
		7.3.3 Comprueba las soluciones y las separa en soluciones y soluciones ajenas				X	NI	X	
		7.3.4 Estudia las restricciones antes de resolver					NI		
7.4 Números Complejos		7.4.1 Trasciende el error del doble signo		X	X		NI		NI
		7.4.2 Admite la notación con el radical sólo para la raíz real no negativa					NI		NI
7.5 Teorema de Pitágoras		X		X	X		X	X	
7.6 Irracionalidad			X		X	X	X	NI	

Perfil del Saber a Enseñar segundo período.

Con la información de la matriz Mr anterior, intentaré construir el Perfil del Saber a Enseñar en el primer período. Para tal propósito se han organizado los datos en la siguiente tabla, en la cual se ha seleccionado de la matriz de resumen las tendencias de los datos. Cabe recordar que el Perfil de esta forma se escoge por medio de los campos con sus respectivos aspectos y sub – aspectos que aparecen con mayor frecuencia, como también se destaca lo que no ocurre, como el complemento de lo que sí se da pero en un porcentaje de corte menor al 50%.

Algunos elementos notables de la muestra son lo siguientes:

1. Todos los textos son nacionales y 5 de los 7 están destinados al nivel de 3° año medio, otro está dirigido al nivel de 2° año medio y el que queda es un compendio de álgebra.
2. Sólo uno de los textos, el 6b fue distribuido por el MINEDUC. En este período los libros de texto de enseñanza media no se licitaban. Este es un hecho que parte recién con la reforma de 1996.
3. Predominan los autores que son profesores de matemática de Liceo y unos pocos son profesores de matemáticas vinculados a la formación de profesores.
4. En este período emergen más libros de texto para la enseñanza media. Es la primera etapa en que se comienzan a comercializar manuales para cursos específicos y por tanto crece la competencia.

Tabla 6.10. Perfil de Saber a Enseñar en el segundo período.

Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3. Uso del signo radical.	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces.	100
	No se utiliza el nombre de radical.	86
	No utiliza el nombre de irracional.	66
	Se presenta el error del doble signo.	66
	No Restringe completamente.	66
4. Introducción al concepto.	Planteamiento Deductivo.	100
	Introduce el concepto como inversa de la potenciación.	100
	Introduce como potencia de exponente fraccionario.	66
5. Tipos de representaciones que utiliza.	Utiliza el signo radical.	100
	No utiliza el valor absoluto.	86
	Utiliza la notación de potencia.	86
	No representa como función.	86
6. Propiedades de los radicales	6.1 La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[a^k]{a}}$ es tratada	66
	- La demuestra incorrectamente	100
	- No restringe	75
	- Enuncia bilateralmente	100
	6.2 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ si es tratada	100
	- La demuestra incorrectamente	57
	- No restringe	57
	- Enuncia unilateralmente	71
	6.3 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$ es tratada	57
	- No la demuestra	75
	- No restringe	100
	- Enuncia bilateralmente	100
	6.4 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ es tratada	100
	- La demuestra correctamente	57
	- La demuestra incorrectamente	57
	- No restringe	71
	- Enuncia unilateralmente	71
	6.5 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$ <u>no</u> es tratada	57
	- No la demuestra	100
	- No restringe	100
	- Enuncia bilateralmente	100
	6.6 La propiedad $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$ es tratada	86
	- La demuestra incorrectamente	83
	- No restringe	83
- Enuncia bilateralmente	66	
6.7 La propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$ es tratada	86	
- No la demuestra	50	
- No restringe	66	
- Enuncia bilateralmente	100	
6.8 La propiedad $(\sqrt[n]{a})^n = a$ es tratada	86	
- No la demuestra	50	
- Restringe completamente	66	
- Enuncia bilateralmente	100	

	6.9 La propiedad $a^n\sqrt{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ es tratada	86
	- La demuestra correctamente	50
	- No la demuestra	66
	- No restringe	100
	- Enuncia bilateralmente	
7. Aplicaciones de los radicales	7.1 La Racionalización es tratada	86
	- Sólo de denominadores	86
	- No restringe	100
	7.2 Las Ecuaciones cuadráticas son tratadas	100
	- Resolución correcta	57
	- No restringe.	71
	7.3 Las Ecuaciones con radicales son tratadas	86
	- No explica el proceso de transformación en ecuaciones no equivalentes.	66
	- Resuelve correctamente	66
	- No estudia las condiciones iniciales	100
7.4 Números Complejos no son tratados	100	
7.5 No Incorpora el Teorema de Pitágoras.	71	
7.6 Incorpora el problema de la Irracionalidad.	66	

En el período que va de 1982 al año 2000, se observa según la tendencia en los libros de texto que:

1. Se utiliza en toda la muestra el concepto de raíz.
2. De forma alarmante en la mayoría de los textos (66%) se encontró el error del doble signo.
3. La tendencia marca la omisión de restricciones en la definición del concepto de raíz asociado al uso del signo radical.
4. El tratamiento es Deductivo en toda la muestra.
5. Se introduce el concepto de raíz como inversa de la potenciación en toda la muestra y de estos un 66% lo vinculan desde las potencias de exponente fraccionario.

6. Se favorece al uso de sólo dos representaciones: con el signo radical y la notación de potencia $a^{\frac{p}{q}}$.
7. Ocurren fenómenos matemáticos como los siguientes:
- a) La divulgación unilateral del signo igual. Las propiedades de multiplicación y división de radicales de igual índice son tratadas unilateralmente.
 - b) Omisión de los campos de validez en la enunciación de las propiedades.
 - c) El tratamiento irreversible de la racionalización únicamente para denominadores.
 - d) La relación Radical – Potencia de exponente fraccionario, no se restringe, lo que da paso a generalizaciones incorrectas.
 - e) Las demostraciones de los teoremas sí están presentes en este período, pero incurren en errores lógicos cuando aparecen.

En el próximo capítulo, revisaremos los datos y resultados obtenidos para el tercer período 2001 a 2009 y al final de éste determinar su respectivo perfil.

CAPITULO 7

Análisis de los libros de texto del Período 2001 – 2009.

7.1. Introducción.

En este capítulo se desarrolla la revisión de los siete libros de texto (denotados por 1c, 2c, 3c, 4c, 5c, 6c y 7c) pertenecientes a la muestra intencionada del tercer período que se inicia en 2001, año en que se ponen en marcha los programas oficiales para tercer año de enseñanza media según el Artículo cuarto del Decreto N°220, y cuyo término se ha contemplado en el presente año 2009, dado que es el año en que se redacta esta tesis.

Al respecto, cabe señalar que el último libro de texto revisado en este capítulo, ganó la licitación por los años 2009 – 2010, etapa que cierra la vigencia del programa actual¹, ya que progresivamente desde el año 2010 en adelante, se aplicará el Ajuste Curricular aprobado en Mayo de 2009. El siguiente cuadro muestra su calendarización:

Tabla 7.1. de Calendarización del Ajuste Curricular

	2009	2010	2011	2012	2013
Vigencia y Programas de estudio		Segundo ciclo y 1° medio	Primer ciclo y 2° medio	3° medio	4° medio
Textos escolares	Marcha blanca 2° ciclo básico	Marcha blanca 1° ciclo básico y 2° medio	Textos con ajuste vigente de 1° básico a 2° medio	Textos con ajuste vigente de 1° básico a 3° medio	Textos con ajuste vigente de 1° básico a 4° medio
SIMCE	4° y 8° básico OF y CMO que siguen vigentes	4° básico y 2° medio OF y CMO que siguen vigentes	4° y 8° básico OF y CMO que siguen vigentes	4° básico y 2° medio OF y CMO que siguen vigentes	
PSU					PSU con ajuste

Fuente: www.textosescolares.cl

¹ A pesar que en la tabla se indique su aplicación en 2012, ya las empresas editoras están preocupadas de la elaboración de libros de texto con incorporación del Ajuste, preparando las futuras licitaciones.

Como ya se hizo en los dos capítulos precedentes, se aplicaron las matrices MIGt y MACt, para orientar la revisión y análisis (histórico – crítico y de contenido) que se sintetiza en la matriz de resumen Mr en el balance de cierre de este capítulo.

7.2. Aplicación de las matrices a los libros de texto.

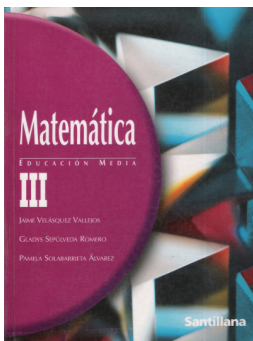
Los siete libros de texto que se examinarán en este capítulo son:

Tabla 7.2 Libros de texto analizados del período 2001 - 2009

	Año	Edición	Título	Editorial
1c	2001	1	Matemática III	Santillana
2c	2002	1	Matemática 3° medio	Mare Nostrum
3c	2003	1	Matemática 3° medio	Arrayán
4c	2004	1	Matemática 3° medio	Mare Nostrum
5c	2005	1	Matemática 3	Santillana
6c	2006	1	Matemática 3° medio	Mare Nostrum
7c	2009	1	Matemática 3ª medio	Zig-Zag

Cuyas portadas se presentan a continuación:

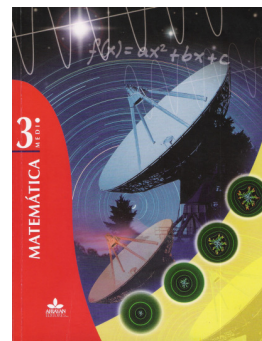
1c



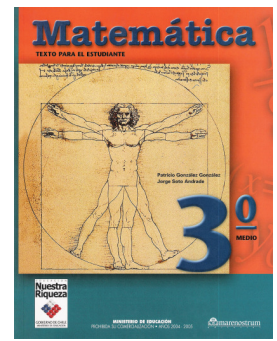
2c



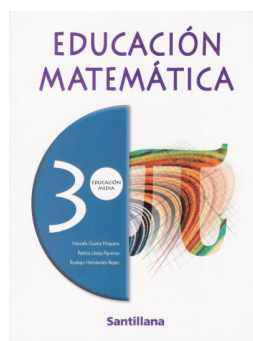
3c



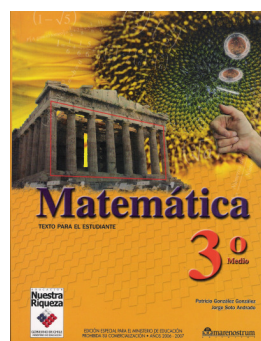
4c



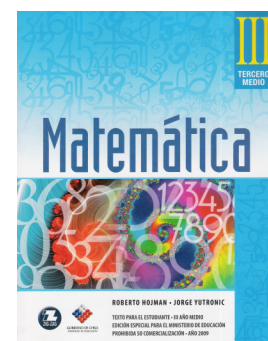
5c



6c



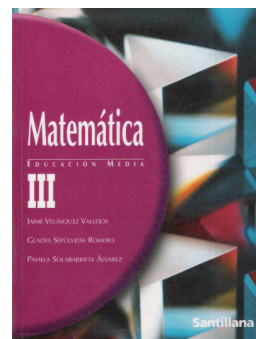
7c



7.2.1.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 1c.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El libro de texto se titula “Matemática Educación Media III”. Es un libro nacional que se comercializa en el mercado particular.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

Sólo aparecen los datos: nombre de los autores e institución en que cursaron sus estudios superiores. Estos son: Todos docentes titulados de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

- **MIGt3: Edición y Tipo de Obra.**

La obra, corresponde a un libro de texto para el nivel de tercer año de enseñanza media, tal como indica en su nombre. Pertenece a la Editorial Santillana S.A., la que lanza este libro con su primera edición (que es la revisada aquí) fechada el año 2001 y que fue impresa en Santiago de Chile por Quebecor World S.A. No se da mayor información al respecto.

- **MIGt4: Presentación física.**

Se compone de un total de 200 páginas blancas con impresión a color, de 21 cm de ancho por 28 cm de longitud.

7.2.1.2 Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 1c.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

Su propuesta la organiza en capítulos y unidades al interior de éstos. El siguiente cuadro muestra los contenidos centrales de cada capítulo.

Tabla 7.3. Organización temática del texto 1c

Capítulo	Nombre	Descripción
1	Álgebra	Se desarrollan dos unidades: <ol style="list-style-type: none"> 1. Potencias y raíces, donde se trata: propiedades, ecuaciones exponenciales, radicación, racionalización, ecuaciones con radicales. 2. Inecuaciones, en la secuencia: Orden en R, Sistemas de inecuaciones, análisis de soluciones.
2	Funciones	Se desarrollan dos unidades: <ol style="list-style-type: none"> 1. Ecuaciones de segundo grado, en relación a: Su clasificación, resolución, problemas de planteo e inecuaciones de segundo grado. 2. Función cuadrática, donde se analiza: simetría y vértice de su gráfica, su concavidad y desde el punto de vista algebraico, el discriminante.
3	Geometría	Se desarrollan tres unidades: <ol style="list-style-type: none"> 1. Relaciones métricas: expone aquí el teorema de Pitágoras, los teoremas de Euclides relacionados con semejanza en el triángulo rectángulo. 2. Trigonometría: especial énfasis a la resolución de triángulos. 3. Reseñas históricas sobre el teorema de Pitágoras, los números irracionales y el teorema de Fermat.
4	Probabilidades	Comprende el desarrollo de dos unidades: <ol style="list-style-type: none"> 1. Enumerando posibilidades, donde trabaja permutaciones y combinaciones. 2. Experimentos aleatorios, en que trata la ley de los grandes números, el árbol de probabilidad, la adición de probabilidades, el concepto de eventos independientes y la probabilidad condicional.

Como objeto de estudio, los radicales aparecen en el capítulo 1, en la primera unidad “potencias y raíces”, que contiene 18 páginas, en las que 11 corresponden en rigor, al tratamiento netamente algebraico de la raíz cuadrada.

- **MACt2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

Cada contenido es presentado con una situación problema de la vida real. El texto se caracteriza en la mayoría de sus páginas, por la situación que va aproximadamente en media plana donde se le deja al estudiante que activamente pueda poner solución a la situación planteada, y luego de algunos pasos que le llevan a adquirir algunos conocimientos, en la mitad siguiente de la plana, viene la sección “Actividades” con ejercicios propuestos, en su mayoría y aunque no son muchos, son instrumentales. Casi siempre no presenta institucionalización, dejando la libertad al docente para tal proceso.

Según las descripciones anteriores, estructuralmente la presentación es constructiva incompleta, al no formalizar los conocimientos supuestamente adquiridos. Respecto al tipo de actividades, podemos clasificarla de mecanicista observando las actividades o tareas, con pocas excepciones.

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Se presentan como se mencionó antes, en el Capítulo 1 de álgebra, en la Unidad 1 “Potencias y raíces”. Se trabaja de forma deductiva, con una presentación de la Radicación con seudas – institucionalizaciones por medio de radicales n – ésimos y ejemplificando para índices 2, 3 y 5.

La organización de la unidad es la siguiente:

- 1) Potencias de base real y exponente entero.
- 2) Ecuaciones exponenciales.
- 3) Radicación.
- 4) Cálculo de una raíz cuadrada.
- 5) Potencias de base real y exponente racional.
- 6) Análisis de expresiones con raíces.
- 7) Operaciones con raíces.
- 8) Racionalización del denominador de una fracción.
- 9) Ecuaciones con radicales.

Se totaliza 18 de 200 páginas para cubrir el tema de los radicales, aproximadamente un 9% de la obra. Este texto puede ser considerado por su año de edición, un libro de transición entre los dos últimos períodos que se estudian en esta investigación, en el que no se trabaja los radicales cuadráticos y cúbicos funcionalmente, sino desde su perspectiva netamente algebraica, visión del período anterior. Sin embargo, el estudio de las probabilidades corresponde a la visión actualizada e incorporada en el nuevo currículum para aquel entonces. Sin duda, este es el precio de colocarse al inicio de un proceso de cambio curricular.

• **MACT4: Presentación de los radicales.**

La presentación de los radicales se comprende mejor al mirar la secuencia de temas desarrollados, los que especificamos a continuación:

1) Potencias de base real y exponente entero.

Breve repaso del concepto de potencia de base real y exponente entero y sus propiedades.

2) Ecuaciones exponenciales.

Entrega el concepto de ecuación exponencial y sin mencionar los pasos de su resolución, propone un ejercicio resuelto y otro a medio resolver. Luego una lista de ejercicios.

3) Radicación.

En una página (Pág.14), desarrolla el concepto de raíz enésima, basándose en un problema que lleva a medir la diagonal de un cuadrado. Supone conocido entonces el Teorema de Pitágoras y la notación radical, ya que la usa sin nombrarla si quiera y da su solución, contexto numérico que no lleva a ningún problema pues está en un contexto de medidas (números positivos).

El concepto lo presenta así:

Al resolver el problema ten presente que, ya sea en ciencias, ingeniería, negocios o construcción, tendrás que hacer planteamientos tales como:

$$x^2 = 25 \quad \text{o} \quad s^3 = 64$$

Los valores de x o s se llaman raíces y son la base de la potencia dada. ¿Qué es lo que buscamos cuando deseamos encontrar la raíz?, dedúcelo a partir de los siguientes ejemplos.

$\sqrt{25} = 5$	ya que	<input type="text"/>	= 25	(raíz cuadrada)
$\sqrt[3]{8} = 2$	ya que	<input type="text"/>	= 8	(raíz cúbica)
$\sqrt[3]{-8} = -2$	ya que	<input type="text"/>	= -8	(raíz cúbica)
$\sqrt[5]{32} = 2$	ya que	<input type="text"/>	= 32	(raíz quinta)

A pesar de estar bien, no pone énfasis en que el valor 5 es el único que satisface la igualdad cuando se utiliza el símbolo radical, es decir, matemáticamente considerando la función radical.

Luego ofrece un listado de ejercicios numéricos en que se dan dos de los tres números (índice, cantidad subradical y resultado de la extracción de raíz) y se pide calcular el valor que falta.

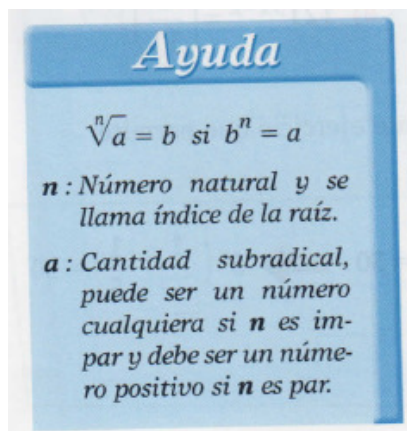
En un segundo ejercicio (Pág.14), se pide completar la tabla:

2. Completa la siguiente tabla.

x	64		225			3^4		10^6
\sqrt{x}		10		5	0,1		5^3	

Revisando el solucionarlo (p.178), se apunta al único valor de la raíz cuadrada, pero no está explicitado en ninguna parte.

Una característica del texto es presentar algunas formalizaciones en pequeños recuadros denominados “ayuda” situados al margen de una página. En el que corresponde a esta presentación el autor escribe:



(p.14)

El número n debe ser mayor que 1 y da sólo la condición para la cantidad subradical, pero en ningún momento indica que $b \geq 0$ cuando n es par, ni tampoco hace referencia a la extensión $\sqrt[n]{0} = 0$.

4) Cálculo de una raíz cuadrada.

Presenta en una página completa el cálculo de la raíz cuadrada a mano (p.15), tema que no está en el programa, aunque puede ser considerado como anécdota. Al calcular las raíces cuadradas, expone como solución sólo un valor, por lo que en este caso, implícitamente trabaja en términos de la función radical, a pesar como se ha visto, que usa la concepción de raíz como solución de una ecuación. Se demuestra así una confusión no superada por los autores.

5) Potencias de base real y exponente racional.

En la página 16 muestra en un recuadro la relación entre las potencias y Los radicales, que como señalamos, llama “raíces”:

$$2^{\frac{1}{3}} = x$$
 elevamos al cubo para trabajar con potencia de números enteros

$$2^{\frac{3}{3}} = x^3$$

$$2^1 = x^3$$

$$2 = x^3$$
 y como esta expresión equivale a $x = \sqrt[3]{2}$

se obtiene que: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

De manera análoga, encuentra una expresión para $2^{\frac{3}{5}}$

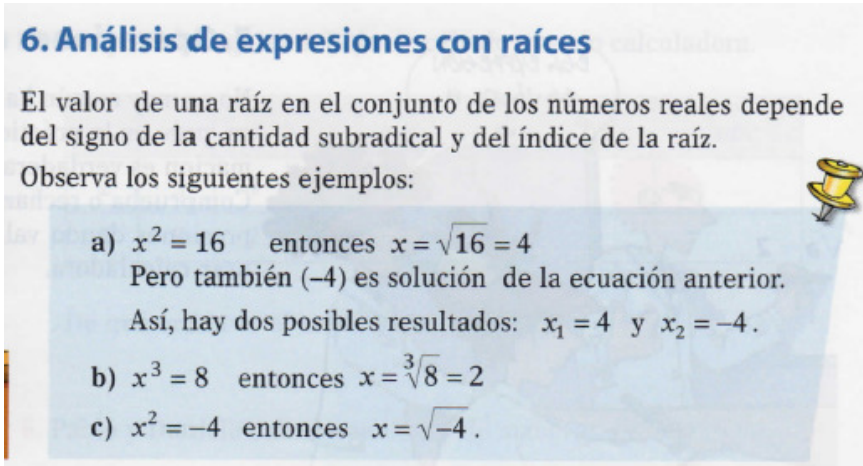
Generaliza tu resultado para las siguientes expresiones:

$$a^{\frac{1}{n}} \text{ y } a^{\frac{m}{n}}$$

Se admite que la propiedad $(a^n)^k = a^{nk}$ que es válida para base real y exponentes enteros, ahora es válida para exponentes racionales. El ejemplo es particular, y no da referencias sobre las restricciones para la base, pues en este caso, la técnica puede hacer trabajar a los alumnos en situaciones delicadas como por ejemplo $\left((-3)^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

6) Análisis de expresiones con raíces.

En la página 17 se desarrolla este tema. Comienza así:



6. Análisis de expresiones con raíces

El valor de una raíz en el conjunto de los números reales depende del signo de la cantidad subradical y del índice de la raíz.

Observa los siguientes ejemplos:

a) $x^2 = 16$ entonces $x = \sqrt{16} = 4$
 Pero también (-4) es solución de la ecuación anterior.
 Así, hay dos posibles resultados: $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$.

b) $x^3 = 8$ entonces $x = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $x^2 = -4$ entonces $x = \sqrt{-4}$.

La proposición a) tiene una implicación incompleta, y por tanto incorrecta, pues sería válida si $x \geq 0$. Luego agrega que -4 es solución también, entonces la pregunta es ¿Cómo se obtiene -4 ?

En la proposición c) utiliza la notación funcional con el operador radical, aplicándolo a un número que no está en el dominio.

Después da un listado de ejercicios en que:

- Los ítems 1 y 2 piden calcular raíces de números positivos y negativos. Para este último caso, los índices son todos impares.
- El ítem 3 dice:

“Usando una planilla de cálculo, encuentra la raíz cuadrada correspondiente a los números naturales desde el 1 al 8 y grafica tus resultados”.

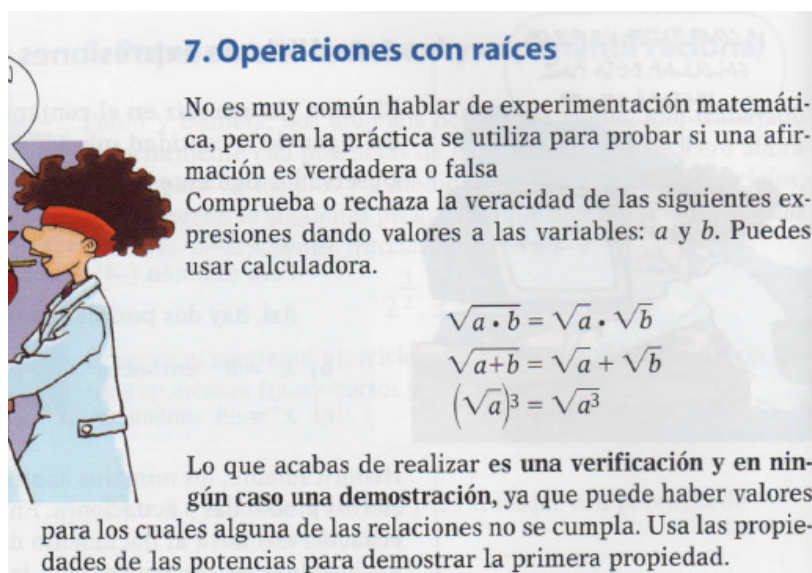
En un extremo de la página 17, da la manera de calcular raíces cuadradas con el programa Excel y así construir una tabla. La consigna de la actividad, pide graficar los resultados, lo que es un error, pues lo que se grafica son parejas de puntos (x, \sqrt{x}) que según lo solicitado es un caso finito para 8 parejas en que $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Esto es lo que más se acerca en el texto respecto de considerar la raíz cuadrada como función, a pesar que como se ilustra, lo que obtendrán los estudiantes no es más que la representación de 8 puntos aislados que están sobre la gráfica de la función raíz cuadrada.

• **MACT5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

El tratamiento de las propiedades comienza en la página 18 con la continuación de los temas que ya describi en el campo anterior (MACT4).

7) Operaciones con raíces.

En algo menos de media página se desarrolla como se muestra a continuación este tema, el que si considera muchos ejercicios propuestos.



7. Operaciones con raíces

No es muy común hablar de experimentación matemática, pero en la práctica se utiliza para probar si una afirmación es verdadera o falsa. Comprueba o rechaza la veracidad de las siguientes expresiones dando valores a las variables: a y b . Puedes usar calculadora.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3}$$

Lo que acabas de realizar es una verificación y en ningún caso una demostración, ya que puede haber valores para los cuales alguna de las relaciones no se cumpla. Usa las propiedades de las potencias para demostrar la primera propiedad.

Los autores dejan a cargo del alumno toda la responsabilidad de experimentar y conjeturar. Los estudiantes muy probablemente sustituirán las letras por números naturales. Además dan la clave al alumno: Sólo es verdadera la primera relación. Sin embargo, piden que el alumno haga una demostración basándose en potencias, pero no dan ninguna indicación para que el estudiante realice lo realmente pedido.

En la serie de actividades propuestas que aparece a continuación, trabaja con aproximaciones para expresiones radicales numéricas de tipo irracional. Hay pocos ejercicios con expresiones algebraicas en la cantidad subradical, aún así, no da ninguna restricción para ellas cuando están bajo un radical de orden par (p.18).

Hay ítems relacionados con la adición y sustracción de expresiones con radicales, para las cuales deben factorizar y hacer la transformación $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ con $a \geq 0, b \geq 0$, otro en que se le muestra la expresión $\left((a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{5}} \right)$ y se le pide que por medio de la propiedad de “potencia de una potencia”, escriba su valor (en realidad, escribir la expresión con sólo un exponente o en versión radical) y luego determinar de la misma forma el valor de $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ (pp.18 - 19).

Estos temas no han sido tratados en el texto. No hay institucionalización ni sistematización respecto a las propiedades relativas al producto y cociente de radicales, ni de la “raíz de una raíz” como llaman los textos más tradicionales. Llama la atención que sólo se den actividades propuestas sin establecer el conocimiento organizadamente.

También se propone resolver $(\sqrt{x-y})^2$ en que omite información sobre x e y . En el solucionario del texto aparece $x-y$. En general, nunca se pone atención en las actividades (ejercicios) sobre el ámbito numérico de los literales (p.18).

Observando el final de la unidad, en la que se encuentra una “evaluación 1” seguido de “ejercicios” se encuentran algunos ítems que llaman la atención:

Los siguientes ítems de la página 27, evidencian que no se especifican las restricciones para los literales:

1. El producto $(\sqrt{x})^x \cdot (\sqrt{y})^y$ es

a) $(\sqrt{xy})^{x-y}$ d) xy
 b) $(\sqrt{xy})^{x+y}$ e) Ninguna de las anteriores
 c) $(xy)^{xy}$

3. La racionalización de $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+2ab}}$ es:

a) $\sqrt[3]{a+b}$ d) $\sqrt[3]{a^4+b^4+2a^2b^2}$
 b) $\sqrt[3]{a-b}$ e) Ninguna de las anteriores
 c) $\sqrt[3]{a^4+b^4}$

4. La expresión $\frac{\sqrt[12]{x^5y^7}}{\sqrt[3]{\sqrt{xy}}}$ es igual a:

a) \sqrt{xy} d) $\sqrt[12]{x^2y^5}$
 b) $\sqrt[6]{x^2y^3}$ e) Ninguna de las anteriores
 c) $\sqrt[3]{xy}$

13. La simplificación de $\frac{\sqrt{x^3y^3}}{\sqrt{xy}}$ es:

a) x^2y^2 d) $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$
 b) xy e) Ninguna de las anteriores
 c) \sqrt{xy}

Como sabemos, si no se utilizarán los valores absolutos, como en $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$, entonces enúnciese que a y b representan números no negativos, de modo que ahí se pueda hacer $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, y coincidiendo con el resultado formal, pues $|a| = a$, sí y sólo si $a > 0$.

• **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

En este campo observaremos los contenidos que hacen que el objeto radicación, pase ser una herramienta. Estos son: Racionalización, Ecuaciones con radicales y la ecuación cuadrática.

Siguiendo con el desarrollo del texto, encontramos los siguientes títulos (p.20):

8) Racionalización del denominador de una fracción.

Aquí describe en tres páginas las técnicas de racionalización más usuales: denominador de la forma $a\sqrt{b}$, $a^n\sqrt{b}$ y $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$. Aparecen varios ejercicios con expresiones literales, para las cuales no hay restricción ni información alguna acerca de sus variables. Ejemplo de ello, es la página 21 que cito a continuación:

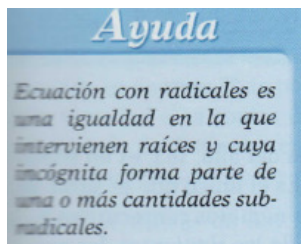
5. Racionaliza los denominadores de las siguientes fracciones.

a) $\frac{b}{\sqrt[3]{b^2}}$	c) $\frac{4mn}{\sqrt[4]{2m^2n^3}}$	e) $\frac{1}{\sqrt[3]{2ab}}$	g) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{y\sqrt[4]{xy}}$	i) $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^2b^2}}$
b) $\frac{3}{\sqrt[3]{c^8}}$	d) $\frac{24\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}$	f) $\frac{5}{\sqrt[3]{t-2}}$	h) $\frac{\sqrt{x-5}}{x\sqrt[3]{5}}$	j) $\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[5]{xy}}$

9) Ecuaciones con radicales.

Desarrolla el tema en casi 1 página completa.

En el margen izquierdo aparece un recuadro “Ayuda” que define “ecuaciones con radicales”.



(p.23)

Mediante un problema de caída libre introduce la ecuación siguiente y su desarrollo: $2 = \sqrt{\frac{d}{5}} \Rightarrow 4 = \frac{d}{5} \Rightarrow d = 20$ y responde: “Luego la altura del puente es 20m sobre el río”. Sigue exponiendo:

Para solucionar este problema fue necesario resolver una ecuación que contenía raíces y cuya incógnita formaba parte de su cantidad subradical.

Este procedimiento de ecuaciones con radicales también se aplica cuando tenemos más de una raíz.

Observa el siguiente ejercicio y explica los pasos realizados.

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} = 6$$

$$\sqrt{x+5} = 6 - \sqrt{x+2}$$

$$(\sqrt{x+5})^2 = (6 - \sqrt{x+2})^2$$

$$x+5 = 36 - 12\sqrt{x+2} + x+2$$

$$12\sqrt{x+2} = 33$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = \left(\frac{33}{12}\right)^2 = \frac{1089}{144} \text{ luego } x = 5\frac{9}{16}$$

Reemplaza la solución en la ecuación original y comprueba que la satisface.

(p.23)

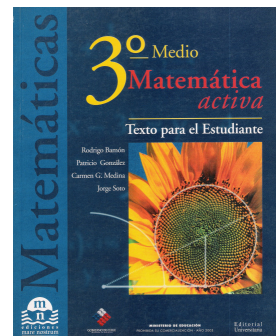
Como se puede apreciar, la presentación del tema, apunta a la técnica.

No especifica por qué debe reemplazarse la solución obtenida en la ecuación original, ni cita ejemplos en que no satisface. En la sección de ejercicios propuestos, al final de la unidad, hay un ítem de ecuaciones con radicales conducentes a ecuaciones de 1° y 2° grado, éstas últimas son vistas en el próximo capítulo “funciones”. Al final del texto se muestran las soluciones correctas, incluso se menciona cuando no hay solución en R .

7.2.2.1 Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 2c.

- **MIGt1: Título, Procedencia.**

El dispositivo se denomina “Matemática Activa 3° año medio”, texto para el estudiante. Es un libro nacional que se



adjudicó la licitación ministerial en 2002 siendo de distribución gratuita para su utilización para el año 2003.

• **MIGt2: Datos de Autoría.**

El equipo de autoría se conforma de cuatro autores:

- Autor 1: Doctor en Matemáticas, grado otorgado por el Instituto Nacional de Matemáticas Puras y Aplicadas (IMPA) de Brasil. Profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.
- Autor 2: Licenciado en Ciencias el año 1977 (U. Chile) y Doctor en Matemáticas en 1983 en la Université Louis Pasteur en Estrasburgo I, Francia. Se desempeña como Profesor del Departamento de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Arturo Prat, Iquique.
- Autor 3: Matemático (1945 -). Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Chile (1967) y Doctor en Ciencias Matemáticas por la Université Paris XI (1975). Es Profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.
- Autor 4: Profesora de Matemáticas, título que obtuvo en sus estudios en la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Según estos datos, se puede observar que el texto está producido o por tres matemáticos de profesión. Cabe señalar que este libro de texto volvió a ganar la licitación de 2003 y 2005 para los períodos de uso: 2004 - 2005 y 2006 – 2007. El equipo de autores informados como tales en el texto, tuvo algunas modificaciones, sin que haya variado significativamente el cuerpo de contenidos y sus tratamientos.

• **MIGt3: Edición y tipo de obra.**

Editorial Mare – Nostrum. Texto Oficial MINEDUC año 2003 para el nivel de 3° año de enseñanza media. Su Distribución es gratuita para todos los establecimientos particulares subvencionados y municipalizados. Impreso en Chile por Prosa S.A. La

edición revisada es la segunda que se terminó de imprimir en Octubre de 2002 con 202.520 ejemplares.

- **MIGt4: Presentación física.**

El libro presenta los requisitos que exige el Ministerio de Educación: contiene 304 páginas blancas con impresión a color y cuyo tamaño es de 21 cm x 27 cm.

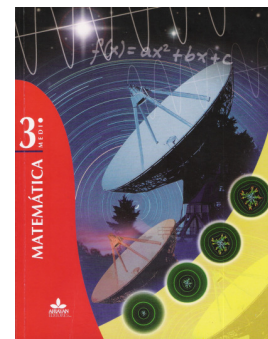
7.2.2.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 2c.

Este libro de texto comprende idéntico tratamiento que las obras 4c y 6c, siendo estas últimas una nueva edición de tales libros con los mismos autores principales. Para evitar la repetición que en este caso se da respecto a los campos de esta matriz MACt, se optó por realizar la revisión del texto 4c que tiene cerca de 32 mil ejemplares más.

7.2.3.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 3c.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El dispositivo se titula “Matemática 3° medio”. Es un texto nacional de venta en el comercio particular.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

Tres son los autores de esta obra:

- Autor 1: Profesor de Matemática y Física, ex – académico de planta del Departamento de Matemáticas de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación y anteriormente perteneciente al Pedagógico de la Universidad de Chile. Cuenta con una amplia trayectoria en la formación de profesores de matemáticas tanto en esta institución como en otras, participando de Asesorías a diversos establecimientos educacionales y desempeñándose últimamente como

Asesor curricular en editoriales. También es autor de otros libros de texto escolar para 7° y 8° básico, como para 1° y 2° año medio.

- Autor 2: Profesora de Matemáticas. Se desempeña como docente del Colegio Saint Rose en Santiago.
- Autor 3: Licenciado en Matemáticas con mención en Matemáticas, por la Universidad Católica de Chile, Master en Historia de la Ciencia: Ciencia, Historia y Sociedad, por la Universidad Autónoma de Barcelona y se desempeña como Profesor de Álgebra y Cálculo en la Universidad de Los Andes.

• **MIGt3: Edición y Tipo de Obra.**

La obra pertenece a la desaparecida empresa Arrayán Editores S.A. que se declaró en quiebra durante el año 2008. Es un texto para el estudiante en su primera edición de diciembre de 2002, para su venta particular y uso desde el año 2003. Impreso en Chile por Morgan impresores. Cuenta con la asesoría curricular del Autor 1. A diferencia de los otros textos de este período, ofrece una introducción en que en su párrafo inicial, da cuenta de la alineación y consideración que tiene esta obra con las propuestas oficiales del Ministerio de Educación de Chile, dirigido especialmente para todos los alumnos del país que cursan el tercer año medio y a los profesores que imparten la asignatura de Matemática en dicho nivel (p.5).

• **MIGt4: Presentación física.**

El libro de texto desarrolla sus contenidos en 269 páginas blancas con impresión a color. Cada página es de 21 cm x 28 cm.

7.2.3.2 Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 3c.

• **MACt1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos se organizan en cuatro Unidades que se dividen en Capítulos:

Tabla 7.4. Organización temática del texto 3c

Unidades	Nombre	Descripción
1	Raíces, ecuaciones y función cuadrática.	Se compone de tres capítulos: 1. Raíces cuadradas. 2. Ecuaciones cuadráticas y otras. 3. Función cuadrática y función raíz cuadrada.
2	Inecuaciones.	No se nombran capítulos para esta unidad. Se estudia aquí: desigualdades, intervalos, Inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales en una variable, ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto y exploración de desigualdades lineales con dos variables.
3	Geometría.	Se compone de dos capítulos: 1. Más sobre triángulos rectángulos, donde se estudia el teorema de Pitágoras y los teoremas de Euclides para el triángulo rectángulo y el teorema de Fermat. 2. Trigonometría, aplicada al triángulo rectángulo y su paso a las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria.
4	Otro paso en el estudio de la probabilidad.	Al igual que la Unidad 2, no se subdivide en capítulos. Se estudia aquí: las nociones preliminares de probabilidades (suceso, espacio muestral, experimentos aleatorios, etc.), la probabilidad frecuencial, la probabilidad de sucesos compuestos, independientes y probabilidad condicionada, finalizando con algunos elementos básicos de conteo.

• **MACt2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

El libro de texto presenta los contenidos con una situación de contexto (real o matemática) que invita a los estudiantes a realizar actividades para construir el conocimiento escolar. Es así que se acerca más a una Presentación Constructiva, la que además es Completa, puesto que hay presencia de institucionalización del saber en recuadros amarillos que tienen este propósito y ubicados al final del conjunto de actividades que apelan a la participación activa del lector.

En cuanto a las actividades propuestas, costó dejarlo en Mecanicista, puesto que ofrece problemas interesantes desde el punto de vista del uso del razonamiento, sin embargo, al igual que muchos otros, en él se observa una mayor cantidad de ejercicios de rutina que persigue la mecanización de técnicas.

• **MACt3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Los radicales son estudiados en la unidad 1 y específicamente en el capítulo 1 algebraicamente y en el capítulo 3 en el ambiente funcional. En el capítulo 2 en tanto, el estatus es de herramienta, pues se las ecuaciones cuadráticas y bicuadráticas. En el texto el trabajo se realiza con radicales de orden 2 y 3 solamente, como aparece en el programa ministerial de la formación general, sin embargo deja fuera un estudio general

que se propone en el programa diferenciado. Al respecto, sólo en dos recuadros de las páginas 37 y 38, se hace referencia a radicales n – ésimos, respecto de la notación de potencia $a^{\frac{1}{n}}$ y $a^{\frac{m}{n}}$. El capítulo 1 que nos concierne por el desarrollo algebraico que examinamos, considera 29 páginas de las 269 de la obra, esto es, cerca de un 11% destinado a los radicales.

• **MACT4: Presentación de los radicales.**

Entre las páginas 14 y 18, los autores dan una serie de actividades relacionadas con el radical cuadrático en un contexto numérico y geométrico: El problema de calcular la medida del lado de un cuadrado conociendo su área, el cálculo que llaman de “raíces” cuadradas por aproximaciones sucesivas o bien con uso de la calculadora. Saltamos esta parte por tratarse de un ambiente no algebraico y por tanto que no entrega información respecto de los fenómenos que motivan la investigación.

Es en la página 19 donde el título dice todo: “La Raíz cuadrada”. Se observa y ratifica como ya se venía conjeturando en su lectura, que la expresión \sqrt{a} la lee como raíz cuadrada de a . El segundo párrafo señala:

“...en diversas situaciones matemáticas, no sólo se trabaja con raíces de números determinados sino que también con raíces de expresiones algebraicas”.

Comentario: Me parece de suma importancia este párrafo, pues no es común encontrarse con estas explicaciones que advierten el modo de trabajo a modo de justificar el tratamiento algebraico. En la revisión de otros textos, como se verá, el trabajo algebraico es minorizado y hasta reemplazado por contextos numéricos, lo que cae en el detenimiento de la transposición didáctica de la raíz cuadrada (para nosotros el radical cuadrado), en tiempos en que no es necesario realizar cálculos prescindiendo de la calculadora².

² Este es el resultado de la tesis Doctoral de T. Assude en Francia, respecto a un análisis curricular en que esta investigadora denuncia la ruptura del saber escolar instalado curricularmente referido al tratamiento de la raíz cuadrada, padeciendo de obsolescencia o envejecimiento biológico en términos de Chevallard.

Merecen especial atención, dos recuadros para su análisis y que se ubican en la misma página (p.), uno a continuación y el otro al costado derecho del párrafo comentado:

Actividades Trabajo en equipo Para explorar

1 Comenten las siguientes afirmaciones:

- Sólo tienen raíces cuadradas los números positivos y el cero.
- La raíz de un número real positivo es un número positivo.
- $\sqrt{0} = 0$
- $(\sqrt{a})^2 = a$

Los autores definen la raíz cuadrada para números reales no negativos, por lo que incorporan en la definición el hecho que $\sqrt{0} = 0$ y también se ve la preocupación por indicar el dominio y recorrido.

Amplía tus conocimientos

- La raíz cuadrada de un número, formalmente, se define:
Sean a y b números reales positivos o cero ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$).
Entonces:
 $\sqrt{a} = b$ si y sólo si $b^2 = a$

En lo que sigue de la página, aclara que es imposible hallar un número real cuyo cuadrado sea negativo (ejemplifica con -4). Luego presenta la noción de opuestos o inversos aditivos, mostrando que \sqrt{a} y $-\sqrt{a}$ para a positivo, son números distintos, tales que $\sqrt{a} + (-\sqrt{a}) = 0$. El énfasis es necesario, más para el profesor que para los estudiantes, en el sentido que los docentes al tomar este texto, podrán desmitificar la falsa divulgación que ha llevado al uso de los dobles signos.

Amplía tus conocimientos

- La raíz cuadrada es sólo aplicable a números positivos o cero; por lo tanto, \sqrt{a} representa un número real sólo si $a \geq 0$.
- La raíz cuadrada de un número positivo es también positiva.

Ejemplos:

- $\sqrt{-5}$ no tiene sentido en los números reales.
- $\sqrt{a} = -2$ es una proposición falsa.

En la página siguiente, en un recuadro de la izquierda denominado “Amplía tus conocimientos”, se vuelve a enfatizar el contexto de validez para trabajar con la raíz cuadrada (como llaman al radical de orden 2).

Conforme al programa oficial del MINEDUC, el texto luego de trabajar la raíz cuadrada, pasa a la raíz cúbica la que aparece en la página 27 motivada por el problema de hallar alguna medida lineal del cubo, conociendo su volumen y da una lista de 3 actividades que exploran aquello.

La definición en tanto se ilustra en la página 28 en su mitad inferior:

Raíces cúbicas

Todo concepto nuevo requiere de una definición que además de dar su significado especifique las condiciones bajo las cuales ocurre. En este caso, es necesario una definición de raíz cúbica y especificar a qué tipo de números se aplica.

Definición.
Sean a y b dos números reales, entonces diremos que:
$$\sqrt[3]{a} = b \text{ si y sólo si } b^3 = a$$

Q sea, la raíz cúbica de un número real (a) es otro número real (b) tal que el cubo de éste (b^3) es igual al primer número (a).

Ejemplos:

1. Ya que $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, entonces $\sqrt[3]{125} = 5$.
2. Si $\sqrt[3]{a} = 10$ entonces $a = 10^3 = 1.000$, por lo tanto $\sqrt[3]{1.000} = 10$.
3. $\sqrt[3]{343} = 7$ porque $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$
4. $\sqrt[3]{0} = 0$, porque $0^3 = 0$.

Aunque las raíces cúbicas tienen un comportamiento parecido al de las raíces cuadradas, también presentan diferencias importantes; una de éstas es el hecho que **todo número real** tiene una raíz cúbica.
Para el caso de números negativos, la raíz cúbica es también negativo.

Comentario: Conuerdo plenamente con los autores lo enunciado en el primer párrafo del título raíces cúbicas. Las define correctamente con los campos de validez no sólo referidos al dominio, sino también al recorrido y además establece las diferencias entre la raíz cuadrada y la cúbica en términos de restricciones.

En sus desarrollos se observa que hace $\sqrt[3]{(-a)^3} = -a$ directamente y no $\sqrt[3]{(-a)^3} = -\sqrt[3]{a^3}$, como se formaliza con la imparidad de la función radical de orden 3.

De un conjunto de actividades situadas en la página 29, destacamos el ítem 4, en el que se pide al lector reflexionar en relación a los campos de validez de la raíz cúbica, como se le llama en el texto:

4. Justifica y ejemplifica las siguientes afirmaciones, donde a es número real.
- a) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[3]{a} > 0$
 - b) Si $a < 0$, entonces $\sqrt[3]{a} < 0$
 - c) $(\sqrt[3]{a})^3 = a$
 - d) $\sqrt[3]{a^3} = a$

Comentario: Hasta aquí podemos ver un desarrollo inductivo que trata la raíz cuadrada, luego la cúbica y con sólo una pequeña ventana para mirar qué hay respecto de las n – ésimas. El término “radical” no aparece en todo el desarrollo, entendiendo siempre como raíz a las expresiones que llevan el signo $\sqrt{\quad}$. Emplea siempre la extensión al cero como radicando y evita el error conceptual del doble signo, con un marcado énfasis en el análisis de los ámbitos numéricos en que son aplicables los conceptos de “raíz cuadrada y cúbica” que propone.

• **MACT5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

Las propiedades las desarrolla separadamente para cada tipo de radical, el cuadrado y el cúbico. En efecto, en la página 19 presenta la “Raíz de un producto y producto de raíces” comenzando por una actividad de exploración basada en el cálculo del área de rectángulos cuyos lados conocidos tienen medidas representadas por radicales, entonces los estudiantes deben escribir la expresión que da el área buscada, encontrándose con una necesidad de indagar sobre cómo se resuelve tal multiplicación que sólo queda indicada.

Después se presenta otra actividad para que los estudiantes comparen los valores entre expresiones del tipo $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ con las del tipo \sqrt{ab} , en que los valores de a y b

son inicialmente enteros y después decimales. Así construye la propiedad que enuncia como sigue, en la que incluimos su demostración:

Si $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ (a y b son números reales positivos o cero), se cumple que:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Demostración

Llamemos c al número que resulta de calcular $\sqrt{a \cdot b}$ es decir $\sqrt{a \cdot b} = c$ entonces por la definición de raíz cuadrada, $c^2 = ab$

Por otra parte, $(\sqrt{a})^2 = a$ y $(\sqrt{b})^2 = b$, luego:

$$c^2 = a \cdot b = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$$

Y por propiedad de potencias:

$$c^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$$

Como c , \sqrt{a} y \sqrt{b} son positivos o cero:

$$c = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Por lo tanto: $c = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Se observa que los autores dan los **campos de validez** y **la demostración** en base a la definición de raíz cuadrada, siendo una demostración coherente desde el punto de vista lógico. Hasta aquí se tiene el signo igual utilizado unilateralmente. Sin embargo, al seguir con la revisión, notamos que hace intervenir la lectura en sentido contrario de la propiedad, generándose el producto de raíces (cuadradas). Así se observa en el desarrollo siguiente:

Ejemplos:

1 Una aplicación de la propiedad demostrada es reducir una raíz, es decir transformarla en una expresión más simple:

$$a) \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$b) \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$c) \sqrt{8} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

La propiedad vista, leída de derecha a izquierda, queda:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

lo que permite multiplicar dos raíces escribiendo el resultado como una sola raíz, lo que a veces puede ser de gran utilidad.

Por ejemplo:

$$a) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$b) \sqrt{a} \cdot \sqrt{ab} = \sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = a\sqrt{b}$$

Comentario: Como se puede ver, considera como aplicación de esta propiedad (vista bilateralmente) la extracción de raíz de un factor, como en $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ para a y b no negativos. Invita posteriormente a realizar algunas actividades para reforzar este conocimiento.

La otra propiedad que presenta es “Raíz de un cociente y cociente de raíces”. A diferencia de la anterior, es que da inmediatamente la expresión al estilo axiomático y no la demuestra. Para este caso, sólo da ejemplos resueltos seguidos de actividades propuestas para el estudiante. Sin embargo, se nota que se considera el signo igual bilateralmente, en su estatus de relación simétrica. También destacamos el uso de restricciones que explicita en cada ejercicio que lleva expresiones literales.

Raíz de un cociente y cociente de raíces

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 0$, entonces se cumple que:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Ejemplos:

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{6} \left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{6} \left(\sqrt{\frac{18}{3}} + \sqrt{\frac{12}{2}} \right) = \sqrt{6} (\sqrt{6} + \sqrt{6})$
 $= \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 2(\sqrt{6})^2 = 2 \cdot 6 = 12$

Actividades

1 Reduce las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ e) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{18}}{\sqrt{6}}$ i) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{6}$

b) $\sqrt{\frac{25}{16}}$ f) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ j) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\frac{40+9}{40-4}}$ g) $\sqrt{\frac{3x}{12}}$ con $x \in \mathbb{R}^+$ k) $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{8} + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{12}{3}}$ h) $\frac{\sqrt{a^2b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$ con $x \in \mathbb{R}^+$

2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden $\sqrt{8}$ cm y $\sqrt{10}$ cm. Determina la razón entre cada cateto y la hipotenusa.

El discurso escrito del texto continua con la “Raíz de una potencia con base positiva y potencia de una raíz”. Presenta un problema de contexto real en que se llega a una expresión que contiene al radical de una potencia de base positiva. Hace la manipulación respectiva para luego generalizar tal situación en la siguiente propiedad:

Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces:

$$\sqrt{a^2} = a$$

Utilizando las propiedades vistas anteriormente e insistiendo en las restricciones de los literales que intervienen, propone a los lectores el desarrollo de algunos ejemplos de aplicación del radical de una potencia. En seguida, muestra que la propiedad recién enunciada, no se satisface para radicandos negativos.

Este es el desarrollo:

Si a es un número negativo, entonces a^2 es positivo y por ello es calculable $\sqrt{a^2}$ sin embargo, en este caso no se cumple $\sqrt{a^2} = a$.

Ejemplos:

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ y no resulta -3
 $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ y no se obtiene -5

Nótese que, por definición de raíz cuadrada, $\sqrt{a^2}$ es un número positivo, igual a a si a es positivo e igual al opuesto de a , si a es negativo. De ahí que se puede concluir

Para cualquier número real a (positivo, negativo o cero) se cumple $\sqrt{a^2} = |a|$.

Como se puede apreciar, los autores introducen el valor absoluto para la institucionalización de la propiedad más general, en todo \mathbb{R} . Sin embargo, para no complicar el estudio, en las líneas siguientes da la indicación a los lectores que reduzcan una serie de expresiones, basándose en las propiedades vistas “considerando que las letras que aparecen representan números positivos”. Lo que rescatamos aquí es la insistencia en explicitar el ámbito que representan las letras, cuidado favorablemente a no hacer generalizaciones para cualquier tipo de números, lo que se condice con una transposición adecuada sin deformar el saber por hacerlo más accesible.

Avanzamos hasta la página 30, en que las propiedades las trabaja ahora para los radicales cúbicos, mostrando que son las mismas que para los radicales cuadráticos, mediante ejemplos numéricos propuestos para los estudiantes y luego generalizando sin demostración, como se ve en el texto extraído a la derecha.

En general, se puede establecer que si a, b son números reales y n es un número entero, se cumple:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; con $b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$

Estas propiedades se pueden usar para reducir (o sea, para escribir de manera simple) expresiones con raíces cúbicas.

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{64x^6} = \sqrt[3]{64} \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{4^3} \sqrt[3]{(x^2)^3} = 4x^2$
2. $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{16} \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{8} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{a}}{b} = \frac{2 \sqrt[3]{2a}}{b}$
3. $\sqrt[3]{\frac{y^4}{125x^7}} = \frac{\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[3]{125} \sqrt[3]{x^7}} = \frac{\sqrt[3]{y^3} \sqrt[3]{y}}{5 \sqrt[3]{x^6} \cdot x} = \frac{y \sqrt[3]{y}}{5x^2 \sqrt[3]{x}}$

Nótese que define las propiedades para radicandos que correspondan a cualquier número real, exceptuando el caso para denominadores nulos.

En la página 36, en tanto, presenta la notación de potencias de exponente fraccionario para los radicales, pasando por una explicación de la tecla x^y de las calculadoras científicas, seguido de un repaso de las potencias de exponente natural, cero y entero negativo, en la secuencia de ampliación del ámbito numérico del exponente de las potencias, para luego señalar qué significado se le puede atribuir a $3^{\frac{1}{2}}$ o a $5^{\frac{2}{3}}$. Para desarrollar este punto, los autores han puesto en juego dos suposiciones:

1. Supongamos que potencias de exponente fraccionario representan números reales.
2. Supongamos que las potencias de exponente fraccionario pueden operarse entre sí o con otras potencias, usando las propiedades de multiplicación, división y potenciación que tienen las potencias de exponente entero”.

Comentario: Cito textualmente estos supuestos, ya que no se ha apreciado este hecho en otras de las fuentes consultadas. Esta metodología es una de las muy utilizadas por los mismos matemáticos para dar significado a nuevas expresiones matemáticas cuando se hace una extensión de un concepto conocido. Se explora la situación con casos particulares, su comportamiento con lo ya existente y a favor de aquello, se acuerda definir un nuevo objeto, como ha ocurrido por ejemplo con la regla de los signos de la multiplicación de números enteros (y que empapa a los reales, por cierto).

He aquí el tratamiento que dan a la relación entre la notación de potencia y la de radical:

Consideremos un ejemplo: $3^{\frac{1}{2}} = x$, donde x denota un número real, que por el momento desconocemos. Con esta igualdad efectuaremos transformaciones con el objeto de llegar a una expresión conocida.

Elevando al cuadrado: $(3^{\frac{1}{2}})^2 = x^2$

Entonces: $3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = x^2$ ¿Por qué?

Luego: $3^1 = x^2$

O sea, x es un número tal que $x^2 = 3$. Si x es un número positivo, se concluye que $x = \sqrt{3}$. Justifica.

- De manera análoga y con las suposiciones anteriores, verifica que $5^{\frac{1}{2}}$, $12^{\frac{1}{2}}$ y $a^{\frac{1}{2}}$ con $a > 0$, pueden interpretarse como $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$ y \sqrt{a} respectivamente.
- Usando las suposiciones mencionadas, deduce que $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$
- ¿Qué resulta para $4^{\frac{3}{2}}$?

Para utilizar las conclusiones a que hemos llegado, sin partir de suposiciones, se da la definición:

Si a es un número real positivo y $n \in \mathbf{N}$ entonces:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

En particular si a es un número positivo, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ y $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

En este tratamiento, se utilizan las suposiciones y se da a entender que concebir las potencias de exponente fraccionario como otra notación para los radicales, resulta una buena opción, pues se conservan las propiedades de las potencias.

Sigue con actividades relacionadas con las transformaciones de una notación a la otra y proponiendo que los estudiantes verifiquen que se cumplen las propiedades de exponente entero, ahora para los nuevos exponentes fraccionarios.

Finaliza en página 38 mostrando la institucionalización de $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

La definición dada para $a^{\frac{1}{n}}$ puede ampliarse a:

Si a es un número real positivo, m un número entero y n un número natural, entonces:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Comentario: Se observa que en coherencia con el saber matemático de referencia, que los autores presentan, la notación de potencia como una definición y no como propiedad y como tal desarrollan casos particulares que sugieren un significado para lo nuevo, preservando lo ya conocido. Se define la generalidad de la expresión $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ en el marco de los números positivos (para $a > 0$), correctamente en base a la función exponencial, como saber de referencia.

Por último, cabe recordar que las propiedades son tratadas con las restricciones de dominio y recorrido en su forma completa, incluso a nivel de actividades propuestas y considerando el signo igual simétricamente, sin confundir una misma propiedad separándola en dos partes.

• **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Las aplicaciones que aparecen en el texto son las técnicas de racionalización de denominadores, las ecuaciones que llama “irracionales” y la resolución de ecuaciones de segundo grado. Hay también otros contenidos (como el teorema de Pitágoras) pero por su contexto en el ámbito de medición y por tanto de números positivos, no serán citados ni analizados, pues lo haremos con el ambiente algebraico, como hemos dicho.

La primera aplicación de la que daremos cuenta y que aparece en la página 32, es la Racionalización, la que trae este mismo título, y sin decir en dos planas de qué se trata, trabaja situaciones de medición en que se obtienen expresiones fraccionarias con radicales cuadráticos en el denominador.

Al final de estas situaciones que resuelven paso a paso, indican: “Los problemas anteriores se simplifican si se utiliza la “racionalización de expresiones”, a lo que agrega en seguida:

“racionalizar consiste en eliminar las raíces del denominador de una expresión fraccionaria sin modificar el resultado de ésta”.

Comentario: En esta cita se puede observar que el concepto de racionalización la atribuyen automáticamente a los denominadores que contienen expresiones radicales. No se da ninguna referencia a la posibilidad de hacer esto con el numerador.

No hay mayor detalle en este contenido, más que el tratamiento de las técnicas de racionalización de denominadores con radicales cuadráticos y cúbicos.

Otra de las aplicaciones que ya anunciamos, es el que aparece desde la página 39, que llaman “ecuaciones irracionales” a la que dedican dos planas. Inician este contenido con un problema de áreas que se resuelve por medio de la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{x-28} = 14$, que denominan como ecuación irracional, caracterizándola como aquella que tiene la incógnita en el interior de raíces. De este modo, vemos que cae en el problema del concepto de irracional, mal utilizado respecto del saber matemático. Se da así la confusión entre expresiones radicales y expresiones irracionales. Éstas últimas se intersectan con las primeras, pero ninguna es subconjunto de la otra. La expresión \sqrt{a} con $a \geq 0$ será irracional sólo en el caso que a no se pueda escribir como fracción entre enteros. Sigue luego otro ejemplo en que llega a la ecuación $\sqrt{4^2 + x^2} + \sqrt{12^2 + (8-x)^2} = 18$. Todo esto en la primera plana.

La segunda aplicación, desarrolla la pregunta que lleva por título: “¿Cómo resolver ecuaciones irracionales?”. Este es su tratamiento:

¿Cómo resolver ecuaciones irracionales?

El fundamento de la resolución de este tipo de ecuaciones radica en las propiedades:


1. En toda ecuación pueden elevarse al cuadrado ambos lados, obteniéndose una nueva ecuación. O sea, si $a = b$ entonces $a^2 = b^2$
2. Al elevar al cuadrado una raíz cuadrada se obtiene la cantidad subradical. Es decir

$$(\sqrt{c})^2 = c$$

Apliquemos lo anterior a la resolución de la ecuación:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= 13 \\ (\sqrt{2x+1})^2 &= 13^2 \\ 2x+1 &= 169 \\ 2x &= 168 \\ x &= 84 \end{aligned}$$

La elevación al cuadrado de ambos lados de la ecuación permite obtener una nueva ecuación sin raíz cuadrada.



Resuelve la ecuación:
 $\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4} = 2$
 y verifica que se obtiene $x = 5$.
 ¿Satisface la ecuación?
 Repite lo anterior para las ecuaciones:
 $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = 2$
 $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2$
 ¿Qué observas? ¿Puedes explicar lo sucedido?

A pesar que en el punto 1 indica que elevando al cuadrado a ambos lados se llega a una nueva ecuación, no se enfatiza que es otra no equivalente a la primera pues la contiene. Al respecto, al parecer, los autores dejan en manos de los estudiantes que sean ellos quienes conjeturen qué sucede, pues en el margen izquierdo de la página aparece un recuadro para que analicen qué ocurre con algunos casos en que encontrado el valor de la incógnita, no satisface a la ecuación dada.

Con alta probabilidad, los estudiantes no podrán indicar la verdadera razón por la cual el valor 5 no es solución de la ecuación planteada. Se extraña aquí un tratamiento más detenido sobre este punto. Concluimos respecto a este tema, que es expuesto de modo instrumental, siendo un contenido en el que se puede aprovechar de hacer un análisis en detalle que permita comprender mejor las restricciones de los radicales cuadráticos.

La última aplicación de los radicales que veremos está en la resolución de las ecuaciones de segundo grado. En la Página 50, cuando se está tratando este tema, particularmente bajo el título “Número de soluciones de una ecuación de segundo grado con una incógnita” los autores toman la acepción de raíz como solución de una ecuación. En efecto, señalan:

“Los números reales que satisfacen una ecuación se denominan raíces o soluciones de la ecuación”.

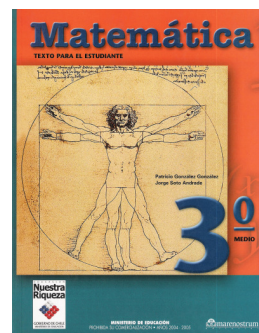
De ahí en adelante, se encuentra indistintamente el concepto de raíz y el de solución, sin embargo no hablan de las raíces cuadradas, cúbicas o enésimas de un número real positivo.

Por otra parte, en la resolución de ecuaciones la exposición es deductiva, pues se dan los distintos tipos de ecuaciones cuadráticas y al mencionar la ecuación de la forma incompleta $ax^2 = c$ con $a \neq 0$ y $c \neq 0$, se ilustra la forma general en que se resuelve, dándose los valores $x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$, para cuando $\frac{c}{a} > 0$, pues en caso de $\frac{c}{a} < 0$, no se tiene solución real. Vemos así que para despejar $x^2 = \frac{c}{a}$ se hace sin el valor absoluto y mediante la expresión o “fórmula” así como es presentado.

7.2.4.1 Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 4c.

- **MIGt1: Título, Procedencia.**

El dispositivo se denomina “Matemática 3° año medio”, texto para el estudiante. Es un libro nacional que se adjudicó la licitación ministerial que lo colocaría como libro único de distribución gratuita durante los años 2004 y 2005.



- **MIGt2: Datos de Autoría.**

El equipo de autoría se conforma de dos autores principales y tres colaboradores. La única información disponible es la que se refiere a esta distinción además de sus grados académicos junto a las instituciones que se los otorgó y en las que en la época trabajan.

Autores:

- Autor 1: Liceiado en Ciencias el año 1977 (U. Chile) y Doctor en Matemáticas en 1983 en la Université Louis Pasteur en Estrasburgo I, Francia. Se desempeña como Profesor del Departamento de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Arturo Prat, Iquique.

- Autor 2: Matemático (1945 -). Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Chile (1967) y Doctor en Ciencias Matemáticas por la Université Paris XI (1975). Es Profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.

Colaboradores:

- Colaborador 1: Doctor en Matemáticas, grado otorgado por el Instituto Nacional de Matemáticas Puras y Aplicadas (IMPA) de Brasil. Profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.
- Colaborado 2: Profesora de Matemáticas, título que obtuvo en la Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Colaborador 3: Bachiller en Ciencias y Humanidades con Mención en Ciencias Sociales y Humanidades, estudios realizados en la Universidad de Chile.

Según estos datos, se puede observar que el texto está producido o por lo menos firmado por dos matemáticos de profesión, lo que hace interesante revisar el nivel conceptual y la presentación de los contenidos.

• **MIGt3: Edición y tipo de obra.**

Editorial Mare – Nostrum. Texto Oficial MINEDUC años 2004 – 2005 para el nivel de 3° año de enseñanza media. Su Distribución es gratuita para todos los establecimientos particulares subvencionados y municipalizados. Impreso en Chile por Quebecor World Chile S.A. La edición revisada es la segunda que se terminó de imprimir en Noviembre de 2003 con 234.760 ejemplares.

• **MIGt4: Presentación física.**

El libro presenta los requisitos que exige el Ministerio de Educación: Contiene 256 páginas blancas con impresión a color y cuyo tamaño es de 21 cm x 27 cm.

7.2.4.2. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 4c.

- **MAcT1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en ocho unidades. La última a diferencia del resto, es una unidad de integración de las temáticas tratadas:

Tabla 7.5. Organización temática del texto 4c

Unidad	Nombre	Descripción
1	En busca de las raíces.	Exploración inductiva de los radicales (del cuadrado al n – ésimo) y su estatus funcional.
2	Mayor o Menor.	Trabaja con desigualdades, inecuaciones y programación lineal.
3	Optimizar: Un desafío permanente.	Expone la función cuadrática para problemas de máximos y mínimos y estudia la ecuación de segundo grado.
4	Triángulos rectángulos: de Pitágoras a Fermat.	Comienza trabajando el teorema de Pitágoras, sus verificaciones y demostraciones, los tríos pitagóricos y su relación con el último teorema de Fermat, luego los teoremas de Euclides, las relaciones proporcionales en el triángulo rectángulo y finaliza con la exposición de la trigonometría en estos triángulos.
5	He aquí mis coordenadas.	Unidad en la que trabaja analíticamente con la circunferencia, la parábola y la elipse, además de presentar descripciones de figuras como lugares geométricos, contenido del plan diferenciado en el programa de álgebra y modelos analíticos de NM3.
6	El retrato de la incertidumbre.	Estudio de las probabilidades condicionadas, el concepto de variable aleatoria y esperanza matemática.
7	Simulemos y grafiquemos.	Principalmente enseña la simulación en Excel del lanzamiento de monedas y dados, y la gráfica en Winplot de inecuaciones para programación lineal y gráficas de curvas descritas por funciones cuadráticas y cúbicas.
8	No a las Islas: la matemática no es un archipiélago.	Puede catalogarse como una unidad de integración de algunos de los contenidos tratados en el libro y sus aplicaciones.

Finaliza el libro con un solucionario de los ejercicios pares, luego un índice temático, un glosario y bibliografía.

- **MACT2: Tipo de Presentación.**

El texto presenta una estructura tipo Axiomática y en cuanto al tipo de actividades se ajusta al estilo Mecanicista. El texto parte de las definiciones estableciendo como transacción el ponerse de acuerdo primero en el concepto nuevo y su notación, por medio de la definición que expone. Luego presenta la sección “Ejercicios resueltos” donde los estudiantes deben seguir la lectura que se supone les indica cómo se hacen los ejercicios, con una metodología instruccional y única, salvo en pocas oportunidades, estableciendo algunos trabajos en equipo que denomina “actividad grupal” y finalizando el tema tratado con la sección “práctica lo aprendido” que ilustra una serie de ejercicios de rutina con unos pocos problemas. Se enfatiza en sus páginas las representaciones simbólicas. Se cataloga entonces con el par (A,M) = (axiomático, mecanicista).

- **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Es en la primera unidad “En busca de las raíces”, donde aparecen los radicales como objeto de estudio, donde se le destina 28 de las 256 páginas del texto, esto es, aproximadamente la novena parte del libro. Los radicales aparecen también en las otras unidades pero en otros ámbitos, por ejemplo, en buena parte de la Unidad 1, se trabaja a nivel de números concretos, tal como lo hace en la Unidad 8 con la construcción del caracol pitagórico para la “visualización de las raíces cuadradas de enteros” y las “proezas de la $\sqrt{5}$ ” en el arte (sección áurea) y en la sucesión de Fibonacci.

En el contexto geométrico los radicales aparecen en la Unidad 4 por el tratamiento del teorema de Pitágoras, los teoremas de Euclides, la construcción de la media proporcional geométrica y la deducción de los valores de las razones trigonométricas para ángulos especiales (30° , 45° y 60°). No se analizará esta unidad ya que no incorpora el ámbito algebraico que nos interesa. En tanto, en la Unidad 3, que examinaremos en el campo MACT6, el ámbito es netamente algebraico, donde los radicales se vinculan con las ecuaciones cuadráticas.

- **MACT4: Presentación de los Radicales.**

Los radicales son introducidos en la Unidad 1 que se desarrolla bajo la siguiente organización:

- (1) El arte de aproximar redondeando.
- (2) ¿Cómo calculamos con raíces cuadradas?.
- (3) El cálculo radical: el caso de las raíces cuadradas.
- (4) El cálculo radical para las raíces cúbicas.
- (5) ¿Por qué no ir más allá? En busca de las raíces n-ésimas.

Luego de tres planas en que desarrolla el tema (1) mostrando su necesidad desde un problema actual, se llega al tema 2: “¿Cómo calculamos con Potencias y Raíces?” en el que se relaciona el concepto de raíz con el de potencia desde el punto de vista operatorio, buscando un número cuyo cubo sea 0,5. Da una idea muy ligera de la notación de la raíz cúbica, apelando al recuerdo del alumno, que supone la conoce desde antes. Luego enlista las propiedades de las potencias de base positiva y exponente entero positivo.

La presentación de los radicales la hace en forma inductiva, partiendo de los radicales cuadráticos temas (3), los cúbicos (4) y generalizando a los enésimos (5). Veamos esto en detalle.

Comienza acordando que primero se pondrá de acuerdo con los estudiantes (lectores), en la terminología y notaciones, para luego revisar las propiedades básicas del cálculo radical. He aquí la presentación textual en que da una definición, seguida de 4 líneas en que expone una verificación y termina con una conclusión:

3 El cálculo radical: el caso de las raíces cuadradas

Comenzando por las raíces cuadradas, ¿qué te parece que nos pongamos de acuerdo en la terminología y notaciones y enseguida practiquemos las propiedades básicas del “cálculo radical”?

Definición

Si a es un número positivo, $\sqrt[2]{a}$ que se escribe más simplemente \sqrt{a} designa aquel único número positivo cuyo cuadrado es a , y se llama la **raíz cuadrada positiva** de a . Por definición, entonces $(\sqrt{a})^2 = a$ y $\sqrt{a} \geq 0$

Hay otro número, esta vez negativo, cuyo cuadrado es también a , a saber $-\sqrt{a}$, que se llama la **raíz cuadrada negativa** de a . Habitualmente, cuando se dice simplemente raíz cuadrada de a , se subentiende que se trata de la **raíz cuadrada positiva** de a .

Por consiguiente, para verificar que $\sqrt{a} = b$, si a y b son números positivos, basta verificar que $b^2 = a$.

Por ejemplo, $\sqrt{4} = 2$ y las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 4$, son $\sqrt{4} = 2$ y $-\sqrt{4} = -2$.

Conclusión

Los **números positivos** tienen una raíz cuadrada positiva y una negativa, denotadas respectivamente \sqrt{a} y $-\sqrt{a}$. El **número cero** tiene, por supuesto, una sola raíz cuadrada, el mismo 0. Los **números negativos** no tienen raíces cuadradas.

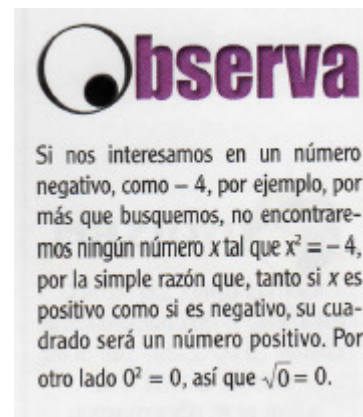
Comentario: Para analizar conceptualmente esta definición la desglosaremos en tres partes: La primera, de la definición propiamente tal, que es correcta y explícita la unicidad del radical cuadrático, aunque no le da este nombre sino el de raíz cuadrada positiva, además señala correctamente las restricciones: $(\sqrt{a})^2 = a$ y $\sqrt{a} \geq 0$.

En la segunda parte, que describimos entre la definición y la conclusión, da una manera de verificar cuando un número se puede expresar con el signo radical, enfatizando nuevamente el ámbito numérico restringido a los números positivos. Hay

que hacer notar que en ningún momento se ha dicho que son números reales positivos y la verificación está realizada con números naturales.

En la tercera parte, la conclusión, muestra que los números positivos tienen dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa, de modo que instala los conceptos de raíz cuadrada de un número positivo, donde ilustra que hay dos posibilidades y la raíz cuadrada positiva de un número positivo que es única y en la cual se utiliza el signo $\sqrt{}$. Sin embargo, de vuelta a la parte 1 de la definición, crea confusión al indicar que “habitualmente cuando se dice simplemente raíz cuadrada de a , se subentiende que se trata de la raíz cuadrada positiva de a ”, de modo que no queda claro cuando el término se refiere a los números (raíces) o a una notación (radical).

Al lado izquierdo de la misma página, aparece un recuadro llamado “Observa” cuyo texto se refiere con un ejemplo a la imposibilidad de encontrar un número cuyo cuadrado sea negativo. Así explicita la condición que debe satisfacer la cantidad subradical (aunque no presenta este nombre). Además, introduce el hecho que $\sqrt{0} = 0$, justificando que $0^2 = 0$.



Posteriormente, se presentan ejercicios resueltos de problemas relacionados en contextos físicos y geométricos y un vistazo al descubrimiento de $\sqrt{2}$.

En el tema 3: El cálculo radical para las raíces cúbicas, parte con la siguiente:

4 El cálculo radical para las raíces cúbicas

Definición

La raíz cúbica de un número positivo a es aquel único número positivo cuyo cubo es a y será designada por el símbolo $\sqrt[3]{a}$

Por ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$.

Fíjate que a diferencia de lo que ocurre con las raíces cuadradas, ahora no hay otros números cuyo cubo sea 8. Los negativos no sirven, porque el cubo de un negativo es también negativo, por ejemplo, $(-2)^3 = -8$.

Ahora bien, con este cálculo hemos encontrado, sin querer, un número cuyo cubo es -8 . ¿Te parece que podemos hacer lo mismo con cualquier número negativo?

En realidad sí, porque si a fuera un número negativo, escrito como $a = -b$, con b positivo, entonces $(-\sqrt[3]{b})^3 = -(\sqrt[3]{b})^3 = -(-a) = a$, tal como hicimos con -8 .

Por otro lado, como no hay duda de que la única raíz cúbica de 0 es el mismo 0, llegamos a la siguiente conclusión.

Conclusión

En las raíces cúbicas todo número a , positivo, negativo o nulo, tiene una única raíz cúbica, que denotamos $\sqrt[3]{a}$ cuyo cubo es a y que tiene el mismo signo que a .

A pesar de que en la definición sólo menciona el radical cúbico restringido a los números positivos, muestra enseguida que es posible ampliar el concepto para cualquier número³, sea positivo, negativo incluso el cero. Esta extensión a los negativos y al cero la establece en la conclusión, como puede verificarse.

De esta definición, vemos la tendencia a llamar “raíz cúbica” y no radical a las expresiones que utilizan la notación $\sqrt[3]{}$. Hasta acá, no se hace mención alguna de la notación alternativa $a^{\frac{1}{2}}$ o $a^{\frac{1}{3}}$.

³ Nunca menciona números reales, sino simplemente números.

Las actividades resueltas que siguen luego de la definición y conclusión anterior, corresponden a situaciones de contexto real, en que debe encontrar la medida de la arista de un estanque cúbico, conocido su volumen. No se usa algebraicamente el radical y se centra en aproximaciones decimales sucesivas, por lo que no merece mayor atención este punto.

En el tema (5): ¿Por qué no ir más allá?, En busca de las raíces enésimas..., hace la siguiente introducción:

5 ¿Por qué no ir más allá? En busca de las raíces n -ésimas...

Después de haber calculado $\sqrt{2}$, ¿no tuviste nunca la tentación de preguntar por $\sqrt{\sqrt{2}}$? Este es un número cuyo cuadrado es $\sqrt{2}$, así que el cuadrado de su cuadrado, es decir, su cuarta potencia, es 2. De hecho, es el único número positivo cuya cuarta potencia es 2, y lo denotaremos por $\sqrt[4]{2}$. Análogamente, $\sqrt[8]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$, designa aquel único número positivo cuya octava potencia es igual a 2.

Más generalmente, designaremos por $\sqrt[n]{2}$, o también $2^{1/n}$, aquel único número positivo x tal que su n -ésima potencia es 2 y también, si la generalidad no te da vértigo:

Definición

Para un número positivo cualquiera a , denotaremos $\sqrt[n]{a}$ o también $a^{1/n}$ aquel único número positivo cuya n -ésima potencia es a .

Los autores apelan a la definición basada en las potencias para dar sentido al objeto que se caracteriza por la notación $\sqrt{\sqrt{a}}$ y para $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$. La introducción es demasiado limitada, pues los órdenes de los radicales son potencias de base dos. No se aprovecha esto para mostrar lo que sucede con otros índices.

Vemos que ahora, que en la definición más general para lo que llaman “raíces n -ésimas de números positivos”, aparece la notación alternativa de potencias cuyo

exponente tiene la forma de fracción unitaria (de la forma $\frac{1}{n}$ con n natural). Así

podemos resumir que:

- Utiliza definiciones correctas con las restricciones completas.
- A pesar que involucra la palabra radical en los títulos de los temas, no la menciona para decir qué se entiende por radical.
- A las expresiones que emplean el signo $\sqrt[n]{}$ las llama raíces (de números positivos si n es par, y si n es impar hace la extensión a los negativos y al cero).
- Presenta la notación alternativa del radical como potencia de exponente fraccionario. Cuando da el concepto de raíz cúbica, abre la posibilidad a utilizar radicandos negativos, y cuando trabaja con radicandos de cualquier orden n , no lo generaliza en la definición, sino en una nota que coloca antes de la sección de ejercitación “practica lo aprendido”.

<ul style="list-style-type: none"> • MACT5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.
--

Luego de las definiciones que hemos analizado correspondientes a los temas 3, 4 y 5 de la Unidad, da lugar en cada caso al álgebra de radicales bajo los subtítulos:

- Las reglas del cálculo con raíces cuadradas (p. 21).
- Las reglas del cálculo radical para el caso de las raíces cúbicas (p. 31).
- Reglas de cálculo para potencias y raíces (p. 35).

Comenzamos observando que utiliza la palabra “radical” en el segundo subtítulo, no así en el resto, pero revisando el libro de texto, no se encuentra definida en toda la exposición. Examinaremos cada subtítulo.

En “las reglas del cálculo con raíces cuadradas”, advierte que “en lo que sigue, a y b son números positivos cualesquiera”. Se destaca que explicita que las letras representan números positivos. Una vez hecho este alcance, presenta las propiedades como reglas.

En efecto, textualmente:

Las reglas del cálculo con raíces cuadradas

Recapitemos en forma general las reglas de cálculo con raíces cuadradas que hemos estado utilizando hasta ahora en casos particulares. En lo que sigue, a y b designan números positivos cualesquiera.

Raíz cuadrada de un producto: $\sqrt{(ab)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Raíz cuadrada de un inverso: $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$

Raíz cuadrada de un cociente: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Monotonía de la raíz cuadrada: Si $a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

De estas propiedades, hace la demostración de la primera, de la siguiente manera:

Verifiquemos, por ejemplo, el caso del producto. Basta ver que $(\sqrt{a} \sqrt{b})^2 = ab$, pero esto resulta inmediatamente de la regla de cálculo del cuadrado de un producto: $(\sqrt{a} \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab$.

Esta demostración no adolece de errores lógicos, pues se basa en la definición de raíz cuadrada positiva.

Luego da un ejemplo numérico:

Ejemplo:
Un ejemplo numérico transparente de la primera regla

Si quisieras recordar la primera regla a partir de un ejemplo numérico transparente, podrías mirar el producto $4 \cdot 9 = 36$. ¿Qué ocurre con las respectivas raíces cuadradas $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{36} = 6$?

Bueno, $2 \cdot 3 = 6$, es decir $\sqrt{4} \sqrt{9} = \sqrt{36} = \sqrt{4 \cdot 9}$

¡Este es el caso $a = 4$ y $b = 9$ de la primera regla!

Se debe destacar que sólo menciona estas propiedades, lo que hace entrever que se considera la igualdad con su propiedad simétrica.

Comentario: Continúa dando algunos ejercicios resueltos de tipo numérico para ocupar la propiedad de la multiplicación de raíces cuadradas en la transformación de la forma $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

Este texto realiza ejercicios netamente numéricos a diferencia de los más tradicionales en que los ejercicios con raíces tratan con expresiones algebraicas.

El último subtítulo antes de comenzar el contenido 4 (El cálculo radical con raíces cúbicas), es “La función raíz cuadrada: ¿Cómo varía \sqrt{x} cuando varía x ?”.

Este texto da lugar como indica el programa, a tratar la raíz cuadrada como función. Para ello, dedica 1 página completa. Guía al alumno para pasar del registro tabular al registro gráfico de la función y le muestra el resultado que debe obtener.

El autor supone conocida por el alumno la gráfica de $y = x^2$, lo que tanto en el programa como en el mismo texto aparece mucho más adelante, en página 79, en que como ejercicio resuelto muestra su construcción.

El presentar la función raíz cuadrada sirve para visualizar que tanto los valores de x como de \sqrt{x} , no pueden ser negativos, lo que falta en esta propuesta y que está en el programa cuando menciona poner cuidado en que $\sqrt{x^2} = |x|$. Este texto resuelve el conflicto de la utilización del valor absoluto, explicitando que las letras representan números positivos. Así $\sqrt{a^2} = a$ considerando que a no puede ser negativo.

Antes de comenzar a tratar las raíces cúbicas y enésimas, propone 11 ejercicios para resolver. Los siete primeros se refieren a cálculo estimativo y utilizando aproximaciones (por ejemplo pide calcular raíces cuadradas con 4 decimales por aproximaciones), el ejercicio 8 pide experimentar para averiguar si es cierto que

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. En el ejercicio 9 el alumno debe construir con regla y compás segmentos de medidas $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots$ (lo que no se ha visto en el texto; sólo en un cuarto de página, se habló de la diagonal del cuadrado respecto de la $\sqrt{2}$ y tal construcción recién viene explicada con el caracol pitagórico en la unidad 8). El ejercicio 10 es un problema relacionado con el teorema de Pitágoras y el 11 pide graficar la función \sqrt{x} entre 0 y 100 construyendo primero a tabla de valores para todos los enteros entre 0 y 100.

En cuanto a las propiedades de los radicales de orden 3, como se ha dicho, aparecen con el nombre de “Las reglas del cálculo radical para el caso de las raíces cúbicas”, presentadas con un párrafo en que señala que recapitulará las reglas del cálculo de raíces cúbicas que hasta ahora ha utilizado en casos particulares. Sin embargo, al examinar su desarrollo numérico, no se observa que tal afirmación sea correcta, pues sólo ha trabajado en términos de aproximaciones numéricas.

Las reglas las enuncia como sigue, diciendo previamente que a y b designan números cualesquiera:

La reglas del cálculo radical para el caso de las raíces cúbicas

Recapitemos en forma general las reglas de cálculo de raíces cúbicas que hemos estado utilizando hasta ahora en casos particulares. En lo que sigue, a y b designan números cualesquiera.

Raíz cúbica de un producto: $\sqrt[3]{(ab)} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

Raíz cúbica de un inverso: $\sqrt[3]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0)$

Raíz cúbica de un cociente: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0)$

Monotonía de la raíz cúbica: Si $a < b$ entonces $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

Dadas estas reglas como les llama el texto, no hay ninguna demostración ni verificación. Las restricciones están correctas para las propiedades enunciadas pero en las actividades propuestas no se observa la aplicación directa, sólo de la primera en sentido unilateral.

Previo a abordar la raíz cúbica como función, donde siguen los mismo pasos que los descritos para la función raíz cuadrada (graficar mediante una tabla de valores), llama la atención un párrafo que con un pequeño sub – título “Una notación afortunada”, donde presenta la notación $a^{\frac{1}{2}}$ para \sqrt{a} y $a^{\frac{1}{3}}$ para $\sqrt[3]{a}$, lo que justifica diciendo que estas expresiones se pueden escribir de cualquiera de las formas mostradas por tener el mismo comportamiento en lo que ha productos y cuocientes se refiere. Explicita en un recuadro resaltado, que las reglas de cálculo para potencias valen también no sólo para exponentes enteros, sino también para exponentes fraccionarios.

Este es un hecho axiomático, pues así como lo indica, es un conocimiento impuesto, al que tampoco hay invitación siquiera para verificar.

Finalmente veamos qué sucede con el tema 5, en que trata las raíces n - ésimas. En este apartado, luego de la definición que ya hemos comentado en el campo anterior (MACT4), desarrolla una serie de lo que denomina “ejemplo”, en que la idea es calcular el valor con decimales de expresiones numéricas en que intervienen radicales de orden 2 a 5. Estas expresiones contienen todas, números enteros positivos, por lo que tales ejemplos son muy limitados. Mostramos aquí el texto escaneado al que hacemos referencia:

Ejemplo:

1. ¿Cuánto vale $\sqrt[4]{81}$?

Respuesta. Vale 3, porque $3^4 = 81$

2. ¿Cuánto valen $\sqrt{32}$, $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[5]{32}$, $32^{1/10}$, $32^{1/100}$?

Respuesta.

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2} = 5,6569;$$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2(\sqrt[3]{2})^2 = 3,1748;$$

$$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2} = 2,3784;$$

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2;$$

y para practicar nuestra notación afortunada:

$$32^{1/10} = 2^{5 \cdot (1/10)} = 2^{1/2} = 1,4142$$

$$32^{1/20} = 2^{5 \cdot (1/20)} = 2^{1/4} = (2^{1/2})^{1/2} = \sqrt{1,4142} = 1,1892;$$

$$32^{1/100} = 2^{5 \cdot (1/100)} = 2^{1/20} = 1,0353.$$

Nota que estas raíces sucesivas se van haciendo cada vez más pequeñas y se van acercando a 1, desde la derecha. Este es en realidad un fenómeno general, para cualquier número positivo a en lugar de 32.

Se nota la ausencia de una buena organización didáctica, que favorezca la comprensión de las propiedades por construcciones basadas en problemas, aunque estos sean de índole matemático.

Pese al buen estado matemático en que se definen y enuncian los objetos matemáticos en esta unidad al menos, las actividades no indican lo que se va haciendo en cada caso, ni invita al estudiante a preguntárselo. Hay saberes demasiado impuestos, aún más de una única manera. Estos ejercicios utilizan las reglas que indica el texto, pero no se especifica en qué momento. Se apela al parecer a que sea el propio estudiante el que logre comprender por sí sólo estos desarrollos sin el camino preparado para ello. Aún más, termina la presentación reforzando la idea ahora en general de que:

Las raíces n -ésimas de números positivos se portan de la misma manera que las potencias y las raíces cuadradas y cúbicas en lo que se refiere a productos y cuocientes, de modo que usando nuestra notación afortunada tenemos las siguientes reglas:

Reglas de cálculo para potencias y raíces

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

para a y b números positivos cualesquiera y exponentes m y n enteros o fraccionarios.

Subentendemos que para el caso de exponentes negativos, se procede como de costumbre: $a^{-1/3}$, por ejemplo, significa $((a^{-1})^{1/3})$.

Fíjate, por otro lado, que si a es negativo, digamos $a = -b$, con b positivo, entonces a admite una raíz n -ésima impar, a saber $-b^{1/n}$, ya que $(-b^{1/n})^n = -b = a$, pero a no admite raíces n -ésimas pares. Por ejemplo, no hay ningún número b tal que $b^2 = -16$.

Comentario: No realiza demostración ni verificación alguna, dando por hecho que así ocurre. Las restricciones son correctas y completas al considerar bases positivas.

En las últimas dos líneas da la posibilidad de extender el significado de $a^{\frac{1}{n}}$.

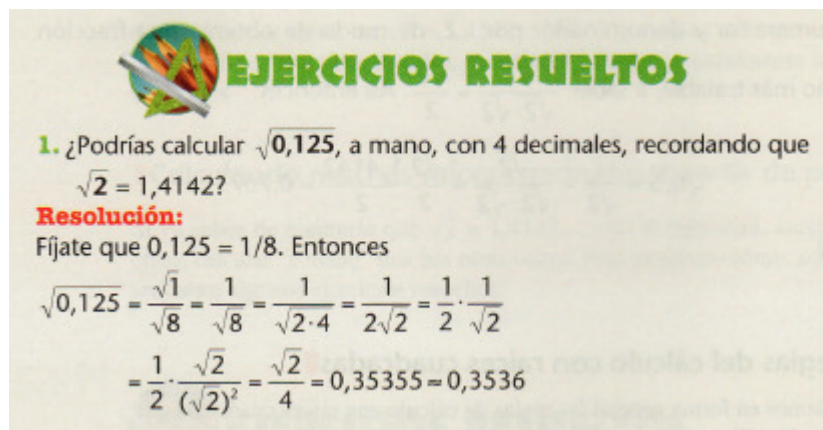
Por último cabe señalar que no se da ningún tipo de prevención respecto de los errores clásicos que tienen los estudiantes al trabajar algebraicamente con los radicales. Por lo demás, la sección de ejercitación que cierra el tema de las raíces n -ésimas contiene 10 ejercicios todos numéricos y todos con la misma consigna inicial “¿Cuánto vale...?”, que consiste en la tarea de hallar el valor numérico de expresiones radicales numéricas en las que bastaría con una calculadora científica para encontrar los resultados pedidos.

- **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Una primera aplicación del álgebra de radicales aparece en la página 23, en la institucionalización de un modelo de racionalización.

Cada vez que te encuentres con una fracción de la forma $1/\sqrt{a}$, puedes amplificarla por \sqrt{a} , de modo de obtener $1/\sqrt{a} = \sqrt{a}/\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}/a$, que es más fácil de calcular, sobre todo si no tienes una calculadora a mano. Este procedimiento se suele llamar, algo pomposamente, "racionalización" de la fracción en cuestión.

Es lo único que trae el texto respecto a la racionalización. Trae los mismos defectos que hemos mencionado. Se llega a esta formalización, luego de cuatro actividades resueltas en que se utiliza esta técnica pero no se da cuenta de ella, sólo se usa sin explicación, por ejemplo en el siguiente desarrollo:



EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Podrías calcular $\sqrt{0,125}$, a mano, con 4 decimales, recordando que $\sqrt{2} = 1,4142$?

Resolución:
Fíjate que $0,125 = 1/8$. Entonces

$$\sqrt{0,125} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,35355 = 0,3536$$

Si el enfoque está en un tratamiento más bien aritmético y no algebraico como se observa en los tipos de tareas y actividades tanto desarrolladas como propuestas que ilustran los autores, cabría esperar un fuerte desarrollo de la búsqueda exhaustiva del valor de $\sqrt{\frac{1}{8}}$, por aproximaciones sucesivas mediante la elevación al cuadrado, por ejemplo, de fracciones o expresiones decimales, lo que ayudaría a comprender la noción de raíz cuadrada positiva como la señalan. Además como este, todos los ejemplos que

están resueltos lo hacen de una sola manera y sin abrir preguntas que, en último caso, permita la participación de los alumnos. Por otra parte, la aplicación que muestran y que dan como justificación de la racionalización, en el cuarto de los ejercicios resueltos (Pág. 23), podría sin calculadora ser resuelto por aproximación.

4. ¿Podrías decidir "a mano" (sin calculadora) si el número $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$ es mayor o menor que 1?

Resolución:
 En lugar de dividir por las raíces indicadas, amplificamos las fracciones para obtener denominadores "racionales" (sin raíces), reduciéndonos así a dos divisiones que podemos hacer incluso mentalmente, siempre que nos acordemos de los valores de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1,7321}{3} + \frac{2,2361}{5} = 0,5774 + 0,4472 = 1,0246 > 1$$

Además, el ejercicio plantea que se debe recordar los valores de $\sqrt{3}$ y de $\sqrt{5}$, lo que es hoy en día, una pérdida de tiempo. Luego da la posibilidad de no acordarse de esos valores, (que son aproximaciones racionales por cierto), y trabaja con algebra de radicales y el teorema (sacado bajo la manga): $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1$.

¿Qué te parece?

Fíjate que en realidad tuvimos que calcular el número propuesto, con ayuda de los valores de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, así que más de alguien se podría preguntar:

¿No se podrá comparar este número con 1, sin calcularlo, si olvidamos cuánto valen $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$?

¿Cómo podrías hacerlo?

Bueno, dándote cuenta de que para saber si un número x es mayor que 1, por ejemplo, basta saber si su cuadrado x^2 es mayor que uno. En nuestro caso:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2}{15^2} = \frac{25 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 30\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{15^2} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{15}$$

Pero $\frac{8 + 2\sqrt{15}}{15} > 1$ equivale a decir $8 + 2\sqrt{15} > 15$, o sea $2\sqrt{15} > 15 - 8 = 7$, y para testar esta última desigualdad elevamos al cuadrado y queda

$$4 \cdot 15 > 7^2$$

es decir, $60 > 49$, lo cual muestra que efectivamente $\frac{8 + 2\sqrt{15}}{15} > 1$.

En la página 85, que es parte del desarrollo de la unidad subsiguiente (3), se presenta el método de la completación de cuadrados para resolver las ecuaciones de segundo grado. En el ejemplo 4:

Se llega al caso particular $(x + 5)^2 = 49$, de donde el siguiente paso es: $x + 5 = \pm 7$. Se omite de esta forma lo que justifica ese pasaje. Veamos que en lo formal si se tiene $(x + 5)^2 = 49$, esto implica que $\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{49}$, por la monotonía de la función radical de orden dos, aplicada correctamente a dos expresiones que representan números reales no negativos, conforme al dominio de la función, de donde se llegaría a:

$|x + 5| = 7$ y de ahí que $x + 5 = 7 \vee x + 5 = -7$. Todo este paso no se muestra. Ahora colocándose en el caso de que los autores quisieron evitar el problema de introducir el valor absoluto, otro modo de explicar el paso de $(x + 5)^2 = 49$ a $x + 5 = \pm 7$, podría ser reescribiendo la ecuación $(x + 5)^2 = 49$ como $(x + 5)^2 - 49 = 0$ y actuar por factorización y con el teorema: $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

4. Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Resolución:
Puedes usar los dos primeros términos para completar el cuadrado de un binomio. Para conseguir esto, suma y resta 25 en el primer miembro de la ecuación. Tienes:

$$x^2 + 10x + 25 - 25 - 24 = 0$$

Con los tres primeros términos tienes el cuadrado que buscabas, por tanto, puedes escribir:

$$(x + 5)^2 - 49 = 0$$

de donde,

$$(x + 5)^2 = 49$$

por consiguiente,

$$x + 5 = \pm 7$$

entonces se encuentran los siguientes valores para x:

$$x = -5 \pm 7$$

es decir,

$$x_1 = -12 \text{ y } x_2 = 2$$

Te sugerimos que resuelvas este ejercicio usando factorización y que compruebes los resultados obtenidos.

El texto en este sentido trae dos problemas desde la didáctica de la matemática, al menos:

1. Respecto de esto último, el abuso de notación con doble signo, indica un “o” incluyente”, pero No el conectivo lógico “ \wedge ”, que se traduce al lenguaje natural por “y”, en el que se halla el error en los desarrollos vistos en el texto.

2. Al no explicitar cómo se llega de $(x+5)^2 = 49$ a $x+5 = \pm 7$, podría perfectamente prestarse para la confusión que hemos ya advertido, en el sentido que, se puede pensar erróneamente que $(x+5)^2 = 49$ lleva a la malacostumbrada técnica:

$$\begin{aligned}(x+5)^2 &= 49 & / \sqrt{} \\ \sqrt{(x+5)^2} &= \sqrt{49} \\ x+5 &= \pm 7\end{aligned}$$

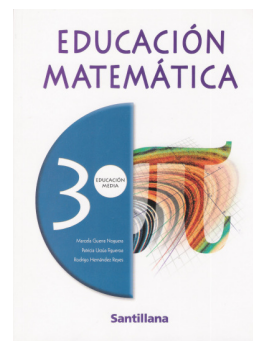
Atribuyendo el doble signo al radical $\sqrt{49}$ y no como debe ser, al hecho que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Cabe señalar que en esta unidad, la palabra raíz toma su acepción de solución de una ecuación, hablando de “propiedades de las raíces” (Pág. 89), entendiéndose entonces, raíces de la ecuación, título que he contrastado con el de la página 21, en que se dice: “las reglas del cálculo con raíces cuadradas”. Creemos necesario en este caso, enfatizar las dos acepciones con que en cada caso es utilizado el concepto de raíz, al no trabajar con el concepto de radical como lo hemos mostrado en el apartado 2.8.4.

7.2.5.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 5c.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El texto se llama “Educación Matemática 3 Educación Media”. Es un libro nacional que se encuentra en el mercado particular.



• MIGt2: Datos de Autoría.

Tres son los autores de este libro de texto:

- Autor 1: Profesora de Enseñanza Media en Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile y Candidata a Magíster en Didáctica de la Matemática por la Universidad Católica de Valparaíso.
- Autor 2: Licenciada en Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Académica de la carrera de Ingeniería Comercial de la Universidad de Los Andes.
- Autor 3: Licenciado en Matemática (1999) y Doctor en Matemática (2005), ambos grados obtenidos en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesor de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad Adolfo Ibáñez.

• MIGt3: Edición y Tipo de Obra.

La empresa editora es Santillana del Pacífico S.A. Ediciones. La Edición no indica número ni año de impresión, pero si está inscrita el año 2005. Se señala además que es impresa en Chile por Quebecor World S.A. Tampoco informa del número de ejemplares.

• MIGt4: Presentación física.

Se constituye por 256 páginas blancas con impresión a color y su tamaño es de 21 cm x 28 cm.

7.2.5.2. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 5c.**• MACt1: Organización de los contenidos.**

Los contenidos están organizados en seis unidades:

Tabla 7.6. Organización temática del texto 5c

Unidad	Nombre	Descripción
1	Raíces.	Se estudia la radicación con el nombre de “raíces”, la raíz cuadrada, cúbica, la racionalización de expresiones fraccionarias, algunas propiedades de las raíces y las ecuaciones con radicales.
2	Expresiones cuadráticas.	Se estudia la función cuadrática como modelo matemático, la ecuación de segundo grado y la parábola como lugar geométrico.
3	Inecuaciones lineales.	Esta unidad se compone de desigualdades, intervalos, inecuaciones y sistemas con una incógnita, ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto e inecuaciones lineales con dos incógnitas.
4	El triángulo rectángulo y la trigonometría.	Se estudian las relaciones métricas en el triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras, los teoremas de Euclides, números irracionales, la conjetura de Fermat y elementos de trigonometría (razones y funciones).
5	Probabilidades I.	Trabaja la probabilidad de sucesos combinados, el principio multiplicativo de conteo, permutaciones y combinaciones y la ley de los grandes números.
6	Probabilidades II.	Se estudian propiedades de las probabilidades, la probabilidad condicional, el concepto de variable aleatoria, y valor esperado de una variable aleatoria.

El libro finaliza con un solucionario, un glosario y la bibliografía recomendada.

• **MACT2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

Los contenidos parten siempre con un problema o situación de contexto real, sin embargo el lector sólo participa pasivamente, pues se le entrega todo resuelto. Luego de esta introducción, seguido de ejemplos, se da la institucionalización. Por tanto, en relación a su estructura se puede catalogar de axiomático, y según sus actividades, como mecanicista pues, se enfatiza el nivel instrumental más que holístico.

• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

En la primera unidad “Raíces” se tratan los radicales como objeto de estudio. Para ello, se destina 29 páginas de las 256, algo así como el 11% del texto. Los contenidos de la ecología de los radicales, están organizados de la siguiente manera:

- 1) Raíces cuadradas.
- 2) Producto y cociente raíces cuadradas.
- 3) Racionalización de expresiones fraccionarias.

- 4) Racionalización de raíces cuadradas en el denominador.
- 5) Función raíz cuadrada.
- 6) Raíces cúbicas.
- 7) Producto y cociente de raíces cúbicas.
- 8) Racionalización de expresiones fraccionarias con raíces cúbicas en el denominador.
- 9) Función raíz cúbica.
- 10) Ampliando el concepto de raíz.
- 11) Ecuaciones con radicales.

• **MACT4: Presentación de los radicales.**

En el texto llaman raíz a las expresiones que usan el signo $\sqrt{\quad}$. No se hace mención alguna a la palabra “radical”, la que sólo emplean en el último tema de la unidad 1: las ecuaciones con radicales.

Se observa que sigue las sugerencias del programa oficial, partiendo por lo que llama la raíz cuadrada y siguiendo con la raíz cúbica para llegar posteriormente a la ampliación del concepto de raíz. Este concepto de ampliar se refiere a llevar el estudio a las raíces n -ésimas, en el sentido de radicales n -ésimos.

En el desarrollo del primer título “raíces cuadradas”, inicia su desarrollo mostrando una situación de caída libre en que se conoce la distancia recorrida por el cuerpo (en el ejemplo es una pelota) y se pide calcular el tiempo en segundos que se demorará en llegar al suelo. Los autores resuelven paso a paso para llegar a concluir luego de $t^2 = 9$, que $t = \sqrt{9}$ indicando que toman el valor 3 y no el de -3 por tratarse de una magnitud que toma sólo valores positivos.

Al despejar t se obtiene:

$$45 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \quad \blacktriangleright \quad 45 = 5t^2 \quad \blacktriangleright \quad t^2 = 9 \quad \blacktriangleright \quad t = \sqrt{9}$$

Para resolver la ecuación anterior se calculó la raíz cuadrada de 9 (no es la única forma), por lo que $t = 3$ o $t = -3$. Como el tiempo es una magnitud que toma valores solo positivos, la pelota se demora 3 segundos en llegar al suelo.

La explicación no es muy clara, puesto que no se especifica que $\sqrt{9} = 3$ y que $-\sqrt{9} = -3$, es decir, de donde se obtiene el 3 y el -3 ya que señala que “se calculó la raíz cuadrada de 9”. Se podría interpretar que de $\sqrt{9}$ se obtiene 3 y -3 , de modo que se selecciona sólo el 3 por el tipo de magnitud (tiempo).

Luego de este ejemplo, institucionaliza el concepto de raíz cuadrada como sigue:

PARA ARCHIVAR

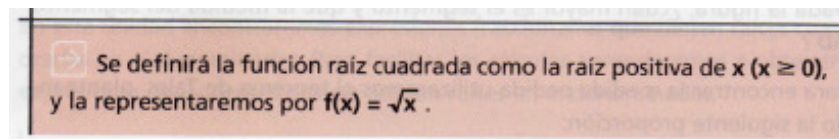
Si a es un número positivo, la expresión \sqrt{a} denota aquel único número positivo cuyo cuadrado es a , y se llamará raíz cuadrada positiva de a .

Por definición $(\sqrt{a})^2 = a$ y $\sqrt{a} \geq 0$. Por otro lado existe $-\sqrt{a}$, cuyo cuadrado también es a , y se llamará raíz cuadrada negativa de a .

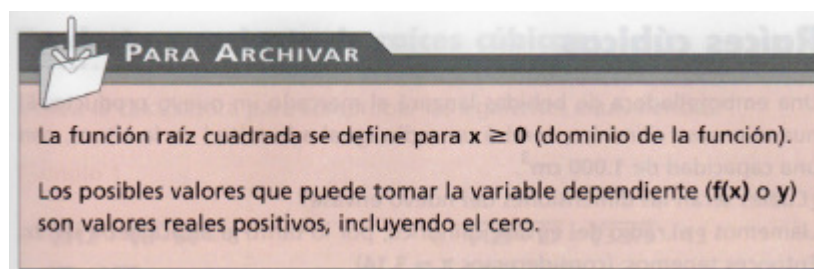
Por lo tanto, los números positivos tienen una raíz cuadrada positiva y otra negativa, representadas por \sqrt{a} y $-\sqrt{a}$, respectivamente.

La definición es correcta, con un buen empleo del signo radical cuando corresponde, y además da las restricciones del dominio y recorrido de la función radical (o raíz como le llama), para el caso del cuadrado.

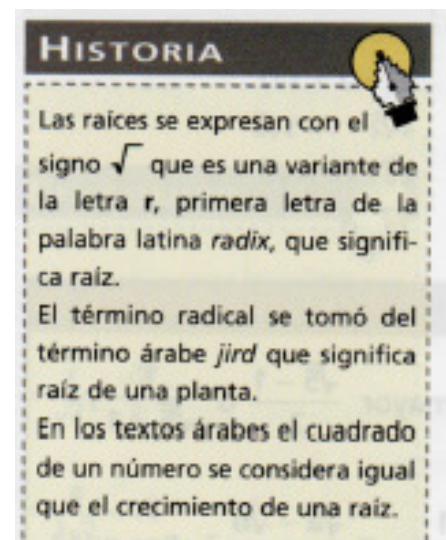
Más adelante, en la página 16, presenta la función raíz cuadrada:



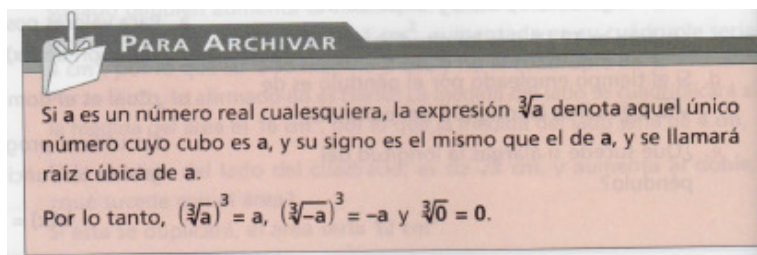
La institucionalización en cambio de la función, sólo explicita el dominio y no el recorrido. La situación se salva cuando vuelve a institucionalizar en el siguiente cuadro que aparece en la página siguiente, en la que sí se considera dominio y recorrido:



En esta misma página, hay un cuadro, que mostramos a la derecha, en el cual se hace referencia histórica a los conceptos de raíz y radical. Sin embargo, como se puede ver, no hay ninguna alusión a la utilidad del concepto radical, ni siquiera se dice que es el nombre del signo $\sqrt{\quad}$. El que “radical” se tome del término *Jird*, raíz de una planta, queda como un dato de curiosidad, como es tratada la historia habitualmente en este tipo de libros de texto, pero que no se trabaja o se le da el provecho para comprender la necesidad por ejemplo de diferenciar entre raíz y radical o bien entre los conceptos de raíz cuadrada de un número real positivo y la raíz como solución de una ecuación.

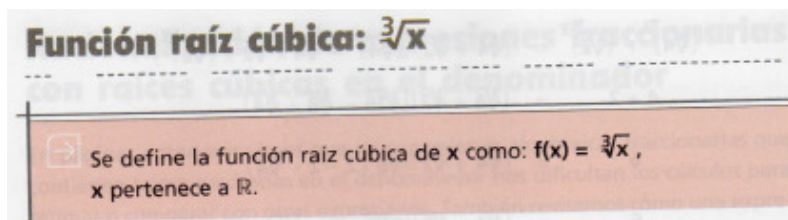


El concepto de raíz cúbica lo desarrolla en la página 18, el cual comienza con una situación de contexto⁴ en que al igual como hizo para la raíz cuadrada, se llega a la ecuación $2r^3 = 318,47$, donde r es el radio de un cilindro. Llega de este modo a buscar por aproximaciones sucesivas, el número cuyo cubo es cercano con dos cifras decimales a 159,24. Después de este largo desarrollo, resuelto paso a paso, institucionaliza el concepto de raíz cúbica:



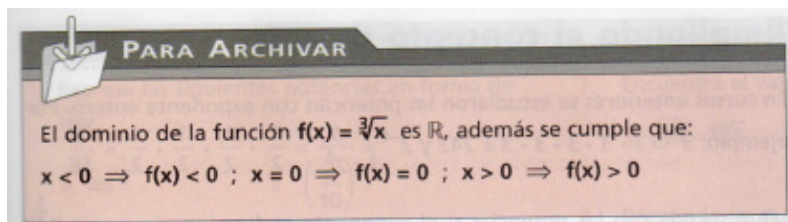
La formalización que hace, acepta a cualquier número real como radicando, con extensión al cero y señalando implícitamente que la expresión $\sqrt[3]{a}$ puede ser cualquier número real. En las páginas 22 y 23, a modo de encabezado, aparecen las dos institucionalizaciones para la función raíz cúbica. De este modo, vemos que los autores quizá por motivos metodológicos, primero formalizan las funciones dando primero sólo el dominio y luego de algunas actividades para conocer su comportamiento, institucionalizan la función de forma completa estipulando su dominio y recorrido.

Esta es la formalización de la página 22, al comienzo:

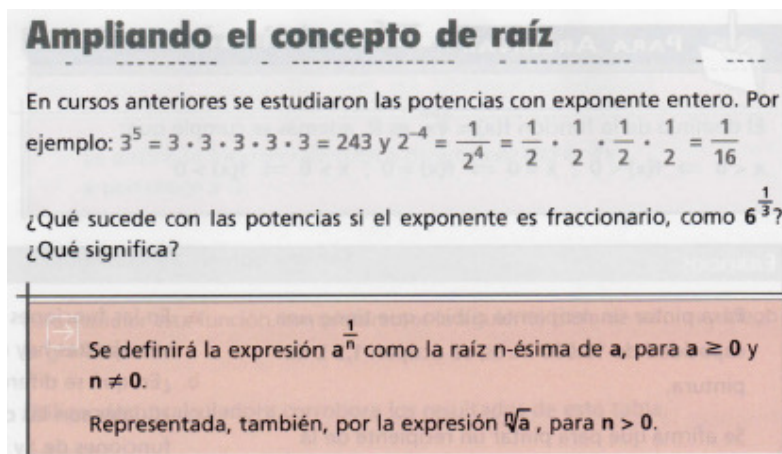


⁴ Se trata de calcular el radio de un cilindro conociendo su volumen, de modo que su radio sea la mitad de su altura.

Y esta la que hace en la página siguiente:



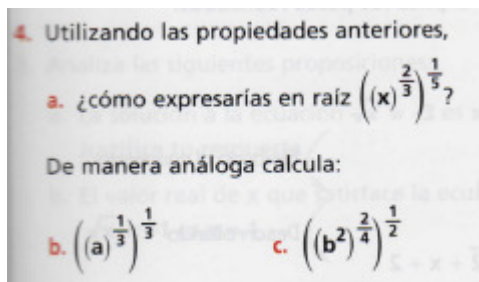
Finalmente, en la página 24 da una ampliación al concepto de raíz, como se muestra a la derecha.



En esta presentación, restringe correctamente para

radicandos no negativos. Se extraña en esta parte, una discusión que aclare por por qué se definió anteriormente que la expresión $\sqrt[3]{a}$ está definida en el ámbito de todos los números reales y sin embargo, la generalización para $\sqrt[n]{a}$, que contiene al caso de índice 3, sólo se define para reales no negativos. Existe así en este discurso un tema no resuelto y que tal como está desarrollado, lleva a confusiones en el uso de notaciones.

En cuanto a los ejercicios propuestos (único lugar en que da espacio a hacer algunas actividades relacionadas con la extensión descrita), seleccionamos el de tipo algebraico y único que hay aquí, pues los 3 anteriores son de tipo aritmético y del 5 en adelante se refiere a temáticas que tratamos en los siguientes campos de la matriz MACT. Es el ítem 4:



de las potencias sean no negativas.

Las propiedades a las que hace mención, son las de potencias. En esta pregunta no hay lugar para las restricciones, ni se pregunta por los valores que puede tomar x, a y b respectivamente. En el ejercicio a) y b) se requiere indicar que las bases

• **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

Las propiedades de los radicales que se estudian en el libro de texto son: Raíz cuadrada de un producto, raíz cuadrada de un cuociente, raíz cúbica de un producto y raíz cúbica de un cuociente. Estas propiedades aparecen en este orden, pero no consecutivamente, pues como hemos dicho se trabaja todo lo relacionado con raíces cuadradas y posteriormente con las cúbicas. Al final, en la ampliación del concepto de raíz del que ya hicimos referencia en el campo MACt anterior, se muestra también cómo se puede emplear la notación de potencia para trabajar con radicales n – ésimos. Entremos en el detalle de estos teoremas.

Las primeras propiedades aparecen en la página 12 y 13, luego de institucionalizar el concepto de raíz cuadrada. En el tratamiento explicita en una línea en negrita que “En adelante consideraremos las raíces positivas de un número”. Comienza dando dos ejemplos, uno para la raíz cuadrada del producto y otro para la raíz cuadrada del cuociente de dos números, utilizando números enteros positivos. Se llega así a la generalización que institucionaliza en el cuadro siguiente:

PARA ARCHIVAR

Si **a** y **b** son números reales positivos cualesquiera, se cumplen las siguientes propiedades:

Raíz cuadrada de un producto ▶ $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Raíz cuadrada de un cociente ▶ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, con $b \neq 0$.

No hay demostración alguna, ni mayor verificación que el ejemplo para cada propiedad que le antecede a este cuadro y vemos que usa sólo la notación de radical.

Estas mismas propiedades para las raíces cúbicas, también las inicia mostrando ejemplos particulares en que se le pide al lector que compruebe las igualdades utilizando calculadora, por ejemplo para ver que $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = 2$. Llega así a formalizar los teoremas en el cuadro siguiente:

PARA ARCHIVAR

Si **a** y **b** son números reales cualesquiera, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

Raíz cúbica de un producto ▶ $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

Raíz cúbica de un cociente ▶ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, con $b \neq 0$.

Deja la propiedad abierta a todos los números reales, y en el caso del cociente, señala que el denominador debe ser no nulo. Por tanto hay uso de restricciones, pero no hay demostración alguna.

En ambos casos vistos, no hay una justificación formal sino sólo a nivel de pocos ejemplos, y los números que utiliza son siempre positivos, siendo que para el índice 3, pueden ser negativos también.

En el cuadro de la derecha, vemos cómo es el tratamiento que se da en el libro de texto, cuando se hace la ampliación a raíces n -ésima. Se observa que utiliza la notación de potencias con exponente fraccionario, para comprobar que cumplen las propiedades de exponente entero, pero es evidente la falta de restricciones en estas propiedades enunciadas con este tipo de notación. Las únicas restricciones son con respecto a evitar la división entre cero, pero no en relación a los radicales.

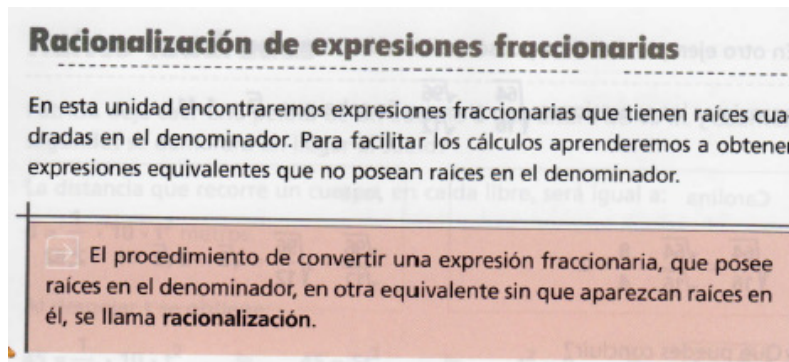
Las propiedades de las potencias con exponente entero, se cumplen también para las potencias con exponente fraccionario.

1. $a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}$, $n \neq 0$ y $m \neq 0$
Ejemplo: $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{243}$
2. $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$, $n \neq 0$
Ejemplo: $5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$
3. $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$, $n \neq 0$, $m \neq 0$ y $a \neq 0$
Ejemplo: $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{3^7}$
4. $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $n \neq 0$ y $b \neq 0$
Ejemplo: $6^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = (6 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
5. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $n \neq 0$
Ejemplo: $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

- **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

Las aplicaciones del álgebra de radicales que vemos en este libro de texto son tres: La racionalización, las ecuaciones con radicales y las ecuaciones cuadráticas. La primera de ellas, la racionalización aparece separadamente en dos apartados, uno para las técnicas de racionalización de denominadores con raíces cuadradas y posteriormente la racionalización de denominadores que contienen raíces cúbicas.

Veamos a continuación cómo presenta la racionalización:



La justificación del procedimiento la da en base a realizar cálculos más simples, evitando las raíces en el denominador. No se menciona la existencia de racionalizaciones de numeradores.

Las actividades propuestas son todas de nivel aritmético, por lo que no es objeto de estudio en esta investigación.

Otra de las aplicaciones que interesa observar, es en la resolución de las ecuaciones con radicales, las que son tratadas en dos páginas 26 y 27. En la primera, se comienza con un ejemplo de caída libre en la que se obtiene una ecuación con un radical con la incógnita como radicando. La resuelve paso a paso e indica que este procedimiento se utiliza para las ecuaciones que contienen raíces con la incógnita en la cantidad subradical y que se puede aplicar para cuando hay más de una raíz. Entonces dice:

Observa el siguiente ejemplo y explica los pasos realizados.

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} = 6$$

$$\sqrt{x+5} = 6 - \sqrt{x+2}$$

Elevando al cuadrado

$$(\sqrt{x+5})^2 = (6 - \sqrt{x+2})^2$$

Desarrollando

$$x+5 = 36 - 12\sqrt{x+2} + x+2$$

$$12\sqrt{x+2} = 33$$

Elevando al cuadrado

$$(\sqrt{x+2})^2 = \left(\frac{33}{12}\right)^2 \quad \blacktriangleright \quad x+2 = \frac{121}{16}$$

$$\blacktriangleright \quad x = \frac{89}{16}$$

Reemplaza la solución en la ecuación original y comprueba que la satisface.

Y luego institucionaliza:

PARA ARCHIVAR

Ecuación con radicales es una igualdad en la que intervienen raíces cuya incógnita forma parte de una o más cantidades subradicales. En una ecuación radical, las soluciones encontradas algebraicamente deben ser comprobadas de modo que la ecuación radical original esté definida para valores reales.

Se observa de este modo, que no da justificación alguna por lo cual hay que comprobar las soluciones obtenidas, y el proceso no lo describe más que con un par de ejemplos resueltos: Para cuando hay una o dos expresiones radicales en la ecuación. Mucho menos se hace alusión a buscar los campos de validez antes de “elevar al cuadrado”.

La única aproximación que hace al respecto, está en el cuadro TIPS que ilustramos a la derecha, en el cual se da una ecuación que no tiene solución en los reales. Sin embargo, esta instancia aparece sólo en este cuadro que sin

TIPS

Observa la ecuación $\sqrt{x+1} = -3$ la solución no pertenecerá a los reales, pues la expresión $\sqrt{x+1}$ no responde a la definición de función raíz cuadrada.

duda da para mucho más que un Tips, por la comprensión de la inutilidad del procedimiento descrito más arriba para resolver ecuaciones con radicales.

En cuanto a los ejercicios propuestos, se observó que el solucionario sólo da las soluciones que sirven. Por otro lado, llama la atención que se deje completamente al lector el hecho de responder al siguiente ítem:

2. ¿Por qué existen valores que no satisfacen una ecuación radical? Menciona un ejemplo para responder la pregunta.

En el que difícilmente un estudiante podrá responder en términos de la no equivalencia de ecuaciones. Además, el solucionario se salta este ítem.

1. Analiza el siguiente procedimiento de solución de ecuaciones cuadráticas e interpreta los resultados.

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

Primero debemos factorizar para luego completar.

$$3x^2 - 6x = -2$$

$$3(x^2 - 2x) = -2$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = -2 + 3$$

$$3(x - 1)^2 = 1$$

$$(x - 1)^2 = \frac{1}{3}$$

En este momento podemos extraer raíz cuadrada y obtenemos que

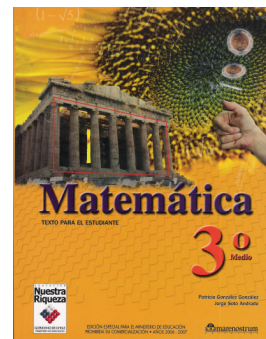
$$(x - 1) = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por último, en las ecuaciones de segundo grado que son tratadas en la unidad 2, en la sección de ejercicios propuestos, el primero de ellos que mostramos a la izquierda, ofrece el desarrollo de una ecuación cuadrática, en la que nos interesa analizar el paso que va de $(x-1)^2 = \frac{1}{3}$ a $x-1 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$, en el que se dice expresamente: “en este momento podemos extraer raíz cuadrada...”, donde claramente tal extracción se omite en

rigor, pues como sabemos: $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$, lo que permanece oculto en el desarrollo.

7.2.6.1. Aplicación de la matriz MIGt para la caracterización del libro 6c.

Este libro de texto, es una nueva edición para los años 2006 y 2007 de los anteriores de los mismos autores principales. Se adjudicó así por tercera vez consecutiva la licitación ministerial, siendo el libro de texto oficial del MINEDUC para estos dos años.



Haciendo la revisión comparativa con los tres libros de texto de los mismos autores y la misma editorial, vemos que las modificaciones de una edición a otra cambian sólo en aspectos de forma, pero el contenido es tratado idénticamente, salvo dos excepciones que deseamos explicitar y comentar, las que tienen lugar en el campo MACt5.

7.2.6.2. Aplicación de la matriz MACt para la caracterización del libro 6c.

- **MACt5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

En esta edición aparece un ejemplo que no viene en la anterior y que muestra la extensión de la propiedad de potencias $(a^n)^m = a^{nm}$, para base real positiva y exponente entero, al caso de exponentes racionales. Retomamos parte de la sección ya descrita en la descripción del libro de la edición anterior, junto a este ejemplo que se agrega en la nueva versión:

Las reglas del cálculo radical para el caso de las raíces cúbicas

Hazlo Tú

Demuestra las reglas de cálculo para las raíces cúbicas! Por ejemplo, para la primera basta verificar que

$$(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^3 = ab.$$

Pero

$$(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a})^3 \cdot (\sqrt[3]{b})^3 = ab.$$

Notación:

En lugar de \sqrt{a} escribiremos $a^{\frac{1}{2}}$, en vista que \sqrt{a} se porta como las potencias de a , en lo que a productos y cuocientes se refiere. Análogamente escribiremos $a^{\frac{1}{3}}$ en lugar de la raíz cúbica $\sqrt[3]{a}$.

Toma nota

Con la notación del margen, las reglas de cálculo

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{si } b \neq 0, \qquad a^0 = 1$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} \qquad \text{si } a \neq 0, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

valen para m, n enteros o fraccionarios iguales a $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{3}$.

Ejemplo

La identidad $(\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$, que se demuestra notando que el cubo de $(\sqrt[3]{a})^2$ es justamente a^2 , a saber, $((\sqrt[3]{a})^2)^3 = (\sqrt[3]{a})^6 = ((\sqrt[3]{a})^3)^2 = a^2$, se escribe también $(a^{\frac{1}{3}})^2 = (a^{\frac{2}{3}})$, es decir, como una extensión de la regla general $(a^m)^n = (a^n)^m$ que habías aprendido sólo para m y n enteros.

Comentario: El ejemplo muestra la identidad que lleva a concluir a partir de sólo un caso particular, que: $(a^m)^n = (a^n)^m$, para cuando $m = \frac{1}{3}$ y $n = 2$ como en

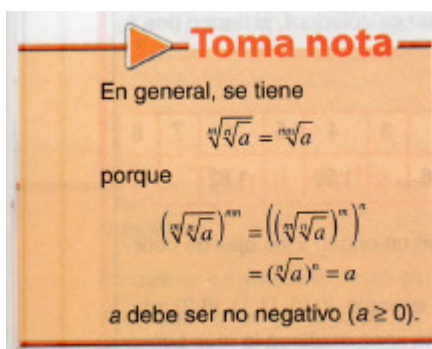
$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^1. \text{ En este ámbito de los radicales de orden 3 (y en general de orden$$

impar) no se dan situaciones que lleven al error, pero sí al no mostrar ejemplos en que con otros exponentes como los fraccionarios irreducibles de denominador par, la misma igualdad $(a^m)^n = (a^n)^m$, para a negativo, no tiene validez, como en:

$$\left((-3)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left((-3)^2\right)^{\frac{1}{2}} = -3$$

Es posible que si no se previene sobre esto en la divulgación del Saber a Enseñar, el profesor al confiar en su material de apoyo, tampoco analice esta posibilidad generando obstáculos didácticos que derivan en errores de los estudiantes, al emplear propiedades en contextos numéricos en que no se cumplen.

Otro elemento que brinda información para estudiar, y que no aparece en la versión anterior, es un cuadro llamado “Toma Nota” que exponemos a continuación:

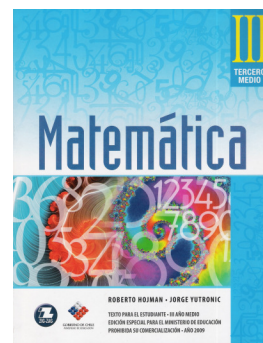


En él, a diferencia del tratamiento anterior, sí se da para el caso general la restricción para el radicando. Sin embargo, la presentación es tan breve que en este sentido que con alta probabilidad, quede como la mayoría de los recuadros de este tipo, como un elemento más, sin el estudio que requiere, a favor de evitar errores procedimentales.

7.2.7.1. Aplicación de la Matriz MIGt para la caracterización del libro 7c.

- **MIGt1: Título y Procedencia.**

El título del texto es “Matemática III Tercero Medio”, texto para el estudiante, en una edición especial para el Ministerio de Educación, puesto que se adjudicó la licitación ministerial del año



2008, siendo el único material de este tipo (en el sector de matemáticas) distribuido por el MINEDUC para su empleo durante los años 2009 y 2010.

• **MIGt2: Datos de Autoría.**

La autoría es de dos personas. El primero Doctor en Física, graduado de la Universidad de Trieste, Italia, en 1980 y recibió su grado de Magíster en Ciencias con Mención en Física, en la Universidad de Chile, en 1975. Se ha desempeñado como Presidente de la Comisión Chilena de Energía Nuclear (en representación del S.E. el Presidente de la República) desde Abril de 1999 y es Jefe del Departamento de Ciencias de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad Adolfo Ibáñez.

El segundo Ingeniero Civil Electricista, graduado en la Universidad de Chile en 1976. Se ha desempeñado en cargos como Presidente de Movilmaster y de Kyber; Director ejecutivo del Fondo de Fomento al Desarrollo Científico y Tecnológico, FONDEF, y gerente de Sonda.

• **MIGt3: Edición y Tipo de Obra.**

La obra pertenece a la Empresa Editora Zig – Zag. Es el texto oficial del MINEDUC años 2009 – 2010 para el tercer año de educación media, lo que significa su distribución gratuita a todos los establecimientos de dependencia municipal y particular – subvencionada. Es impreso en Chile por RR Donnelley. La edición revisada es la primera, la cual se terminó de imprimir en el mes de Enero de 2009 totalizando 249.385 ejemplares.

• **MIGt4: Presentación física.**

Por tratarse de un libro de texto que participó y se adjudicó la licitación 2008, cumple con las características impuestas por tal concurso, esto es: 280 páginas blancas con impresión a color y cuyo tamaño es de 21 cm x 27 cm.

7.2.7.2. Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 7c.

- **MACt1: Organización de los contenidos.**

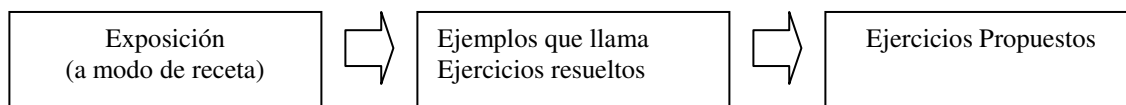
Los contenidos se encuentran organizados en cuatro unidades.

Tabla 7.7. Organización temática del texto 7c

Unidad	Nombre	Descripción
1	Las Funciones raíz cuadrada y cuadrática.	Trabaja dos temas principales: “La Raíz cuadrada de un número”, (la que luego extiende al concepto de raíz cúbica) y “La Función cuadrática”.
2	Inecuaciones lineales.	Estudio de las desigualdades a partir de casos de contexto de la vida diaria, planteo y resolución de inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con y sin valor absoluto.
3	Más sobre triángulos rectángulos.	Revisa las unidades de medida angular, el teorema de Pitágoras y el teorema de Fermat para pasar luego a la trigonometría del triángulo rectángulo y su extensión como función desde el análisis del círculo unitario.
4	El estudio de las probabilidades.	Comienza desde la historia de las probabilidades, sus aplicaciones, pasando por los conceptos claves (lenguaje probabilístico), pasando por la regla de Laplace, la probabilidad de sucesos simples y compuestos, probabilidad condicionada y finalmente expone algunos elementos rudimentarios de la combinatoria.

- **MACt2: Tipo de Presentación de los contenidos.**

La presentación de los contenidos comienza por lo general, con un enunciado expositivo. A pesar de que no parte inmediatamente con la definición, las líneas que dedica a la introducción de los conceptos nuevos, es impuesta, lo que al lector le da un rol claramente pasivo y muestra “el” modo de cómo hacer una u otra cosa. Por tal motivo, el tipo de presentación que se ajusta respecto a su estructura es la Axiomática. Respecto a las actividades, es Mecanicista. En este caso, el libro no contiene una gran cantidad de ejercicios, por el contrario llama la atención que sea en un pequeño número, pero no son situaciones problematizadoras, sino aplicaciones directas de reglas estudiadas en las páginas previas. Se puede caracterizar su estructura y actividades del siguiente modo:



• **MACT3: Ecología de los radicales en el libro de texto.**

Los radicales son estudiados en la unidad 1: “Las funciones raíz cuadrada y cuadrática”, en un desarrollo que sobrelleva sólo el caso para los radicales de orden 2 y 3. En este texto, no se llega a profundizar en otros índices para los radicales, de modo que haciendo la comparación con los programas oficiales, esta unidad (y el libro de texto completo) no dan espacio para los temas convocados en la asignatura de álgebra y modelos analíticos del plan diferenciado en matemáticas. Un total de 64 de las 280 páginas ocupan esta unidad, esto es, cerca del 23% del libro. Tratándose de un libro que es seleccionado por el Ministerio, las temáticas en que se abordan los radicales, principalmente cuadrados, son los mismos que aparecen en el programa oficial, tales como el teorema de Pitágoras, los teoremas de Euclides relacionados con el triángulo rectángulo, el empleo de los radicales en trigonometría y así, usos netamente en ámbitos de números positivos.

Al revisar el libro de texto, se constata que sólo la unidad 1 es materia de análisis para los propósitos de esta tesis, pues es sólo allí donde se desarrollan los contenidos relacionados con los radicales a nivel algebraico.

• **MACT4: Presentación de los radicales.**

Como se ha dicho ya, los radicales se estudian en la unidad 1, en la cual los contenidos se organiza en dos bloques⁵, como mostramos aquí:

La raíz cuadrada de un número.

- (1) Oscilando entre una y otra alternativa.
- (2) La Ampliación del campo deportivo.

⁵ En el texto no se le da nombre, sólo aparecen como títulos con mayor jerarquía que por tanto, engloban al resto.

- (3) Extracción de raíz cuadrada: La operación inversa de elevar al cuadrado.
- (4) Cálculo aproximado de la raíz de un número.
- (5) Propiedades de la raíz cuadrada.
- (6) La Raíz cuadrada como potencia fraccionaria.
- (7) Comparación de fracciones con denominadores radicales.
- (8) Racionalización del denominador de una fracción.
- (9) Raíz cúbica.
- (10) Sistema de coordenadas cartesianas.
- (11) La función raíz cuadrada.
- (12) Una igualdad aproximada.
- (13) Otra forma de calcular la raíz “a mano”.

La Función raíz cuadrada

- (1) ¿Para qué sirven las ecuaciones de segundo grado?.
- (2) Funciones lineales y cuadráticas.
- (3) Situaciones reales y la ecuación de segundo grado.
- (4) La función cuadrática.
- (5) Forma estándar de la función cuadrática.
- (6) Representación gráfica de la función cuadrática⁶.
- (7) Intersección de curvas.
- (8) Vértice y eje de simetría de una parábola.
- (9) Resolución de ecuaciones cuadráticas.
- (10) Propiedades de las raíces de las ecuaciones de segundo grado.
- (11) Síntesis de la Unidad.
- (12) Más ejercicios propuestos.
- (13) Autoevaluación.

⁶ Luego de este título, aparecen otros más que no colocamos, pues a pesar de tener la misma categoría de título, estudia casos particulares de las gráficas, por lo que hemos decidido saltarnos al siguiente título que responda realmente a otro tema distinto en términos jerárquicos.

Comentario: Al observar sólo los títulos enlistados anteriormente, vemos que aparece el término “raíz” y también el de “radical”, pero ¿Cómo dialogan estos conceptos al interior del texto?.

Luego de exponer en dos planas el desarrollo de los títulos “Oscilando entre una y otra alternativa” y “La Ampliación del campo deportivo”, que tratan a modo de motivación, algunas aplicaciones que dan cuenta de la necesidad de conocer el estudio de lo que llama raíz, donde emergen los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$; se entra al estudio de la “Extracción de raíz cuadrada: la operación inversa de elevar al cuadrado”, que parte ilustrando la noción de operación inversa o contraria (mediante el hacer – deshacer) que es conocido por los estudiantes en la relación suma – resta o en la de multiplicación – división, para dar base a la construcción de la extracción de raíz.

De este modo, en un contexto netamente aritmético, haciendo caso a la historia, presenta la siguiente:

Definición
La raíz cuadrada de un número positivo a , es un número positivo b tal que $b^2 = a$.
Adoptamos como notación $b = \sqrt{a}$, que leemos “raíz cuadrada de a ”.

Interviene el signo radical en la definición, sin hacer referencia a él, indicando por \sqrt{a} , lo que llama “raíz cuadrada de a ”, con la restricción sólo para el radicando, a saber, $a > 0$ y no se da la extensión al cero $\sqrt{0} = 0$. Además, el conocimiento previo en que funda el concepto de raíz cuadrada queda claro desde el título: Las potencias de exponente 2 y su relación inversa a modo intuitivo y visto como un operador⁷.

Posteriormente establece vía una tabla de valores, la relación entre cuadrados perfectos (definiéndolos) y la raíz cuadrada de cada uno de ellos:

⁷ En la página 18, los autores explicitan que entienden la raíz cuadrada como un operador.

Número entero	Cuadrado perfecto
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

$\sqrt{1} = 1$	porque $1^2 = 1$
$\sqrt{4} = 2$	porque $2^2 = 4$
$\sqrt{9} = 3$	porque $3^2 = 9$ y así sucesivamente.
$\sqrt{16} = 4$	
$\sqrt{25} = 5$	
$\sqrt{36} = 6$	
$\sqrt{49} = 7$	
$\sqrt{64} = 8$	
$\sqrt{81} = 9$	
$\sqrt{100} = 10$	

Se observa que no cae en el error del doble signo.

Continúa con el “cálculo aproximado de la raíz de un número” (entendiéndose que se trata del abuso de lenguaje en que dice raíz para abreviar raíz cuadrada), donde desarrolla el método de bisección para hallar aproximaciones racionales de radicales cuadráticos irracionales.

Previo a pasar al tratamiento de la raíz cuadrada (como se denomina en el texto), se trabaja la notación de potencia de los radicales de orden dos, con un desarrollo excepcional, pues no se había visto antes en el resto de los libros de texto revisados. Por tal motivo, citamos en detalle lo que hace:

La raíz cuadrada como potencia fraccionaria

Recordemos que una de las propiedades demostradas para potencias enteras de igual base es:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Analicemos la siguiente pregunta:

¿Qué valor debe tener m para que se satisfaga la ecuación $a^m a^m = a$?

Como se puede ver, en general m no va a ser un número entero.

Y continua en la página siguiente:

<p>Si generalizamos para números cualesquiera la propiedad recientemente enunciada para números enteros, tendremos que:</p> $a^m a^m = a^{2m}$ <p>Comparando los segundos miembros de las dos últimas ecuaciones se puede apreciar que, dado que deben ser iguales, estamos en presencia de una ecuación entre potencias de igual base:</p> $a^{2m} = a$ <p>Debe cumplirse entonces, que los exponentes deben ser iguales entre sí, es decir:</p> $2m = 1 \quad \text{o} \quad m = \frac{1}{2}$ <p>Por otro lado, dado que:</p> $a^m a^m = (a^m)^2$ <p>Entonces, la ecuación original toma la forma</p>	$(a^m)^2 = a$ <p>Pero, por definición de raíz cuadrada, si $b^2 = a$, entonces $b = \sqrt{a}$, la ecuación anterior nos indica que:</p> $a^m = \sqrt{a}$ <p>Como anteriormente habíamos aventurado que, en la situación que estamos analizando $a^m = a^{\frac{1}{2}}$, podemos concluir que $a^{\frac{1}{2}}$ es una forma alternativa de escribir \sqrt{a}, es decir:</p> $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ <p>Como veremos posteriormente, en algunos casos resulta más conveniente, desde el punto de vista operacional, utilizar la notación recientemente introducida para el operador raíz cuadrada y generalizar para números cualesquiera las propiedades conocidas de la operación potencia con exponentes enteros.</p>
---	---

Comentario: A pesar de ser una muy buena manera de llegar a la expresión de potencia del radical de orden dos, vemos en el párrafo que hemos destacado, la falta de restricción correspondiente, pues para llegar a $a^{\frac{1}{2}}$ debe señalarse que $a \geq 0$ y que $a^{\frac{1}{2}} \geq 0$, de modo de ser coherente con su discurso, que se inicia indicando la relación de operación inversa, que formalmente se describe en términos de funciones.

Haciendo un análisis más fino de la cadena de ecuaciones exponenciales que inicia con $a^m \cdot a^m = a$, llegando a $a^{2m} = a$, se tiene que ambas ecuaciones son equivalentes en el ámbito que conocen desde antes los estudiantes, esto es, con exponentes enteros, sin embargo cuando se pasa a $2m = 1$, nunca se hace mención a que la resolución de la ecuación requiere de extender el concepto de potencia (que venía siendo tratado en base a productos ocasionados por factores iguales – excepto en el caso de la base nula - a otro nuevo concepto de potencia, ahora con exponente fraccionario y

que retomando aquí lo que concluyen los autores, $a^{\frac{1}{2}}$ es una forma alternativa de escribir \sqrt{a} .

Insistiendo un poco más en esto, la propiedad en la matemática escolar que posibilita la resolución de ecuaciones exponenciales, mediante la técnica de la igualación de bases, debiera comunicarse con las siguientes restricciones y sin demostración, a menos que se esté trabajando sobre funciones inyectivas:

Dados dos números reales n y m , y un número real positivo $a \neq 1$:

$$a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$$

Formalmente la demostración de este teorema es simple, pues basta con probar que la función exponencial $f(x) = a^x$, como es sabido, definida para $a > 0, a \neq 1$, con dominio \mathbb{R} y recorrido \mathbb{R}^+ , es inyectiva⁸. La demostración se hace por el método de reducción al absurdo.

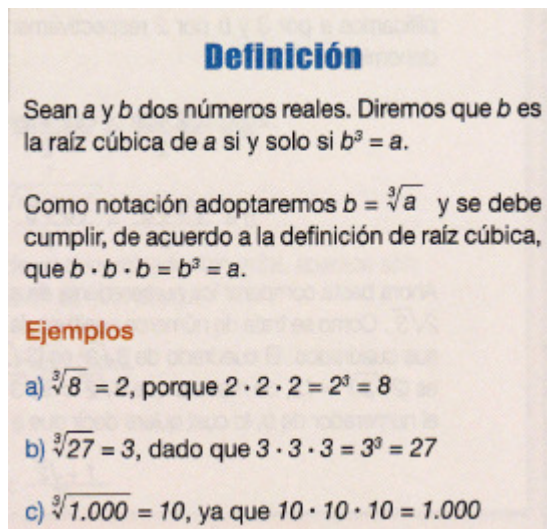
Sea $a > 0, a \neq 1$ y m, n dos números reales distintos del dominio de la función, tales que $f(n) = f(m)$, es decir, $a^n = a^m$. Pero si esto ocurre, entonces, $1 = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, de modo que $n - m = 0$ de donde $n = m$, lo que contradice el supuesto inicial de m, n distintos. Por tanto, $f(x) = a^x$ es inyectiva.

Saltamos algunos tratamientos que da al radical cuadrático, que veremos en el próximo campo MACt5, para ver la presentación del radical cúbico.

Comienza la exposición con la pregunta “¿Por qué la raíz cúbica?”, en que da un problema que va resolviendo y que se relaciona con el contexto de la vida diaria, la en

⁸ La inyectividad de una función f , indica que $(\forall x_1 \in \text{dom}_f)(\forall x_2 \in \text{dom}_f): f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

que una persona desea saber cuánto deben medir las dimensiones de un envase con forma de paralelepípedo, para que su capacidad sea el doble de otro ya conocido. Así llega al número $\sqrt[3]{2}$. Luego ofrece la siguiente definición:



Comentario: En los ejemplos, se puede observar que los limita al caso de radicandos positivos, pero luego repara en ello con el subtítulo “Una diferencia entre la raíz cuadrada y la raíz cúbica”, donde explica que para el caso de las raíces cúbicas (como las define), si se pueden tener radicandos negativos, como gran diferencia con las cuadradas, señalando que:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ ya que } (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = -8 \text{ (p.26)}$$

Nótese que la transposición es aquí la habitual ya encontrada en la matemática escolar, en cuanto a que hace $\sqrt[3]{-8} = -2$, en lugar de $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$ que se define formalmente en el Saber erudito, en razón de la imparidad de la función radical de orden 3.

Continua el texto con el subtítulo: “La raíz cúbica como una potencia fraccionaria”, en la que sigue el mismo camino que he citado para la versión de la raíz cuadrada y por tanto cae en la misma falta de rigor en cuanto a las restricciones no

señaladas y que producen contradicciones a nivel de discurso en sus fundamentos, como ya dije antes. La diferencia en esta parte del texto es la incorporación de tres párrafos que muestro a continuación, en los que generaliza el tratamiento dado para llegar a la notación de potencia de cualquier radical:

Esta forma de escribir las raíces como exponentes fraccionarios es factible de ser directamente generalizada a todos los índices radicales, de modo que, por ejemplo:

$$\sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}},$$

Y en general:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

De esta forma, todas las propiedades de las potencias son transferibles a las raíces. A modo de ilustración:

$$\left(\sqrt[5]{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^3 = a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$$

Y en general:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Igualmente, dado que $\frac{1}{\sqrt[3]{a^5}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{3}}}$, recurriendo a las propiedades de las potencias enteras podemos afirmar que:

$$\frac{1}{a^{\frac{5}{3}}} = a^{-\frac{5}{3}}, \text{ es decir } \frac{1}{\sqrt[3]{a^5}} = a^{-\frac{5}{3}}$$

Comentario: Se sigue manteniendo la falta de restricciones o dominios de validez para los cuales la función exponencial está presente.

Los ejemplos son casos particulares que no ofrecen problemas en la definición, pues corresponden a índices impares (3, 5 y 7), los que se cumplen para valores negativos de la base (en un contexto no funcional), pero no se aprovecha de ver lo que sucede con bases negativas y cómo esto hace que se tenga que adoptar la convención general de que en general la expresión a^x , para x real, a debe ser positivo, para poder establecer la composición de funciones que muestra que “la elevación a potencia y la extracción de

raíz” son operaciones inversas, lo que comunica la igualdad $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$, para n

en el dominio de $f(x) = a^x$.

Finalmente, en el texto los autores tal como lo propone el programa oficial, desarrolla la función raíz cuadrada, sólo explicitando las restricciones de dominio, pero no de recorrido. Su énfasis está en la representación gráfica y las comparaciones de los

valores de las expresiones \sqrt{x} , para radicandos positivos mayores o iguales a cero. Cabe señalar que al iniciar el segundo bloque destinado a la Función cuadrática, encontramos en su introducción, la frase:

“...al estudiar las intersecciones con los ejes coordenados nos veremos enfrentados al problema de las soluciones (también llamadas raíces) de lo que se conoce con el nombre de ecuación cuadrática...”(p.40).

Con esta cita, los autores hacen mención de la acepción de raíz como solución de una ecuación cuadrática en este caso, pero en lo que sigue del texto no hay mayor aclaración respecto al concepto matemático de raíz que no aparece tratado en la transposición divulgada en el libro.

• **MACT5: Tratamiento de las propiedades de los radicales.**

Los títulos que examinaremos son los que aparecen en las páginas 16 y 27. El primero es “Propiedades de la raíz cuadrada” donde estudia la:

- Raíz cuadrada de un producto.
- Raíz cuadrada de un cuociente.

Ambas explícitas con este nombre, mientras que más adelante, en la página 27 bajo el título “Operaciones con raíces y notación exponencial”, da lugar a la amplificación de radicales y su aplicación para multiplicar y dividir radicales de distinto índice, las cuales no enuncia con ningún nombre especial.

La Raíz cuadrada de un producto, la presenta por medio de dos ejemplos particulares, observando que $\sqrt{36} = 6$, viendo que $36 = 9 \cdot 4$, y que $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{9} = 3$, entonces, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$, por tanto, $\sqrt{36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$, de donde llega a concluir que $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$. Igualmente, da el segundo ejemplo para $\sqrt{225}$, jugando entonces con radicandos que son cuadrados perfectos.

Sitúa la propiedad anterior como una propiedad general de la operación de extracción de raíz cuadrada (p. 17). Con este anuncio, se observa que siguen los autores entendiendo a modo de “quinta operación aritmética” el tratamiento general que dan, tal como los griegos ya lo habían concebido, claro está, sin un desarrollo algebraico que incluso se extienda al caso de los números negativos.

Veamos la demostración que da de esta propiedad.

Demostración
Supongamos que a y b son números reales positivos, es decir $a > 0$ y $b > 0$.

Entonces su producto ab también es un número positivo.

La expresión $\sqrt{a \cdot b}$ es, por definición, un número positivo, al igual que \sqrt{a} y \sqrt{b} .

Si efectivamente, se cumple que $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, entonces al elevar ambos miembros al cuadrado la igualdad debiera mantenerse, es decir:

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$$

(Lo que estamos diciendo es que si $p = q$, entonces $p^2 = q^2$.)

Respecto al primer miembro de la relación anterior, sabemos que, por definición de raíz cuadrada:

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b$$

En cuanto al segundo miembro, podemos afirmar de nuestros conocimientos de potencias adquiridos anteriormente, que el cuadrado de un producto de números es igual al producto de los números al cuadrado, de modo que:

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$$

Comparando los segundos miembros de las dos últimas relaciones, podemos establecer que efectivamente:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

Esto demuestra nuestra conjetura.

Comentario: Las restricciones que muestra que hacen efectiva la propiedad para radicandos positivos, pero no hay nunca una observación para el caso de radicando nulo. Respecto al saber formal, he visto en el apartado 2.8.4. de esta tesis que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, para $a \geq 0, b \geq 0$. En todo caso, el segundo párrafo de la demostración, da cuenta de la preocupación de los autores por cuidar el dominio de validez, al decir que el producto ab es positivo, por tratarse de un producto de números positivos. En tanto, no enfatiza del mismo modo los valores que toma el recorrido.

La demostración usa el hecho de que $p = q \Rightarrow p^2 = q^2$ (Pág. 17), lo que sabemos no es reversible en \mathbb{R} . Esto quedaría superado al explicitar el recorrido de la función radical cuadrática, pues al escribir $(\sqrt{a \cdot b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$ y si se dijera que $\sqrt{a \cdot b} \geq 0$ y que del mismo modo $\sqrt{a} \geq 0$ y $\sqrt{b} \geq 0$, la proposición anterior no sólo sería necesaria sino también suficiente, lo que garantiza que se está utilizando un recurso que probablemente (interpretamos), tenían considerado los autores, pero que no fue registrada, como se requiere en la divulgación de los mensajes, para evitar confusiones y errores.

Por otra parte, no se invita a problematizar este asunto, de modo que los propios destinatarios del libro de texto tengan que dar cuenta de las limitaciones numéricas de la propiedad, y en tanto, los profesores que usen el libro, tengan este tipo de orientaciones. Creo necesario destacar estos aspectos, pues una buena cantidad de errores conceptuales y procedimentales que se comenten en matemáticas y en especial en el estudio de los radicales, está en la omisión de información (Vidal, 2001).

Cabe señalar que sólo utiliza la representación por medio de radicales, sin pasar a la notación de potencia para hacer la demostración.

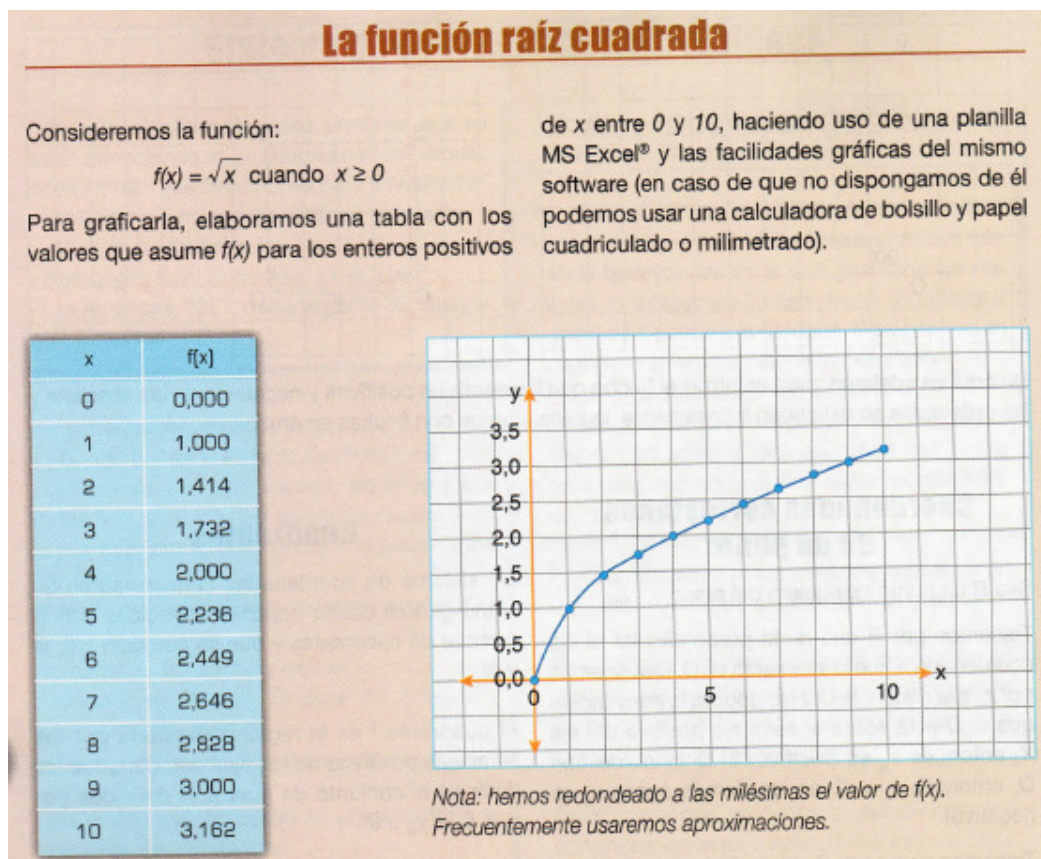
Desarrolla luego una serie de aplicaciones relacionadas con la racionalización de denominadores en que emplea las propiedades señaladas, pero que examinaremos en el siguiente campo.

Por ahora continuamos revisando lo concerniente al tratamiento de las propiedades. Llegamos así a la página 27, que siguiendo una presentación expositiva, da cuenta de una supuesta situación en que se requiere una forma para efectuar $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$, en que sin más preámbulo da la técnica inmediatamente, buscando el mcm de los índices respectivos. Con esto logra escribir que $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2}$ y luego desarrolla.

Comprueba de dos maneras que la técnica funciona: Elevando a 6 cada uno de los factores y mostrando que se llega al mismo número, y reescribiendo cada factor como potencia de exponente fraccionario, empleando las propiedades de las potencias en extensión para el caso de exponentes racionales no enteros.

No se observa ninguna restricción para esta propiedad implícita utilizada, aunque en los ejemplos, como ha sido la tónica del texto en esta unidad, sólo utiliza números positivos para los radicandos. Peor aún es la ausencia de institucionalización de este conocimiento que tiene un doble “peso”: El de utilizar representaciones del mismo registro de los radicales, por amplificación del índice y por otra, el de hacer una extensión a la multiplicación de radicales, ahora para cualquier índice.

Pasando ahora al tratamiento de la raíz cuadrada como función, la que trae el texto desde la página 32 en adelante, no se hace especificación del recorrido de ésta y como mencione antes, sólo hace un estudio de tipo aritmético.



En lo sucesivo, los autores proporcionan formas de encontrar aproximaciones de radicales, por descomposición en productos o cuocientes.

- **MACT6: Aplicaciones del álgebra de radicales.**

El texto da un lugar importante (por la cantidad de espacio destinado) a la racionalización de denominadores. Dedicamos siete planas y media a este tema, donde encontramos las técnicas para denominadores monomiales, binomiales y trinomiales que contienen radicales cuadráticos en al menos uno de sus términos.

La justificación del acto de racionalizar (sólo el denominador), la basa en la necesidad de comparar fracciones con denominadores radicales⁹. En efecto señala:

“Una manera de poder establecer la posición relativa en la recta numérica de fracciones como las anteriores, es racionalizar sus denominadores antes de proceder a la comparación, es decir, amplificarlas por un factor apropiado que elimine las cantidades radicales (es decir, que contienen raíces) en el denominador”.(p.)

La cita muestra que concibe por raíces, las cantidades radicales. Luego aparece la siguiente explicación respecto del acto de racionalizar:

Racionalización del denominador de una fracción

Racionalizar el denominador irracional de una fracción significa transformar la fracción dada en otra equivalente cuyo denominador no contenga raíces.

Aunque parezca absurdo, para lograr tal propósito se multiplica la fracción dada por 1, pero escrito de una manera adecuada que conduzca a la forma deseada.

En otras palabras, hay que amplificar la fracción dada por un número apropiado que elimine las raíces del denominador. Dicho factor de amplificación se conoce con el nombre de factor de racionalización o factor racionalizador.

En el primer párrafo, se observa que llama irracionales a las expresiones que contienen raíces, por tanto, se subentiende de aquello, que toda expresión con el signo radical $\sqrt{\quad}$ es de tipo irracional, inferencia claramente imprecisa, pues el radical de orden dos de un cuadrado perfecto, es un número racional.

Continúa con una plana completa con nueve ejemplos desarrollados, de los cuáles sólo dos contienen literales, sin ningún tipo de restricción. En la página 21, da ejemplos resueltos donde racionaliza fracciones con denominadores binomiales, de donde destacamos el ítem II en que viene uso de literales, colocando sólo una restricción en uno de los ejemplos. Curiosamente, en la página 22, si se dan restricciones (pero también incompletas) en la sección de ejercicios propuestos.

⁹ Aquí usa el término “radicales”, que según el discurso del libro de texto revisado, hace referencia con esto a las expresiones que se escriben con el signo radical, sin hacer mención al número que es la raíz enésima positiva.

Desde la página 28 la racionalización de fracciones con radicales cúbicos en el denominador, donde de 26 ejercicios, sólo 1 contiene literales y el resto son numéricos. En cuanto a la resolución de ecuaciones cuadráticas, cae en resolver $y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$ omitiendo el paso que da respuesta a esta técnica.

7.3. Síntesis del capítulo.

Como balance de este capítulo, presentaré en primer lugar la matriz de resumen y cotejo (Mr) para determinar el Perfil del Saber a Enseñar propuesto en los libros de texto de este período. Luego enfatizaré algunos elementos para la reflexión como lo son los sistemas de Representación utilizados, algunos fenómenos didácticos acaecidos, los tipos de actividades propuestas: ejercicios, problemas, demostraciones, experimentaciones y los errores (conceptuales, procedimentales, entre otros) que emerjan.

Tabla 7.8. Matriz de resumen y cotejo aplicada a los libros de texto período 2001– 2009

Campos, aspectos y sub – aspectos		Período 3 (2001 – 2009)						
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Libro 5	Libro 6	Libro 7
1. Vigencia de la fuente		01	02	03	04	05	06	09
2. Nivel de enseñanza media		3°	3°	3°	3°	3°	3°	3°
3. Uso del signo radical	1.1 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama raíces	X	X	X	X	X	X	X
	2.2 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama radicales	X				X		
	3.3 A las expresiones con $\sqrt[n]{\quad}$ las llama irracionales							
	3.4 Comete el error del doble signo (por ejemplo, $\sqrt{4} = \pm 2$)							
	3.5 Lo usa con restricciones sólo para el radicando (dominio)							X
	3.6 Lo usa con restricciones de dominio y recorrido		X	X	X	X	X	
4. Introducción al concepto	4.1 Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)	X						
	4.2 Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)		X	X	X	X	X	X
	4.3 Como inversa de la potenciación	X	X	X	X	X	X	X
	4.4 Como potencia de exponente fraccionario (o racional)	X				X		
	4.5 Otro (especificar al final de la parrilla)							

5. Tipos de representaciones que utiliza	5.1 Con el signo radical		X	X	X	X	X	X	X
	5.2 Con uso de valor absoluto			X	X	X	X	X	
	5.3 Con notación de potencia (exp. fraccionario)		X	X	X	X	X	X	X
	5.4 Notación funcional		X	X	X	X	X	X	X
	5.5 Otro (especificar a continuación de la parrilla)								
6. Propiedades de los radicales	6.1 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	6.1.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.1.2 La muestra correctamente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.1.3 No muestra	NI	NI	NI	NI	NI	NI	X
		6.1.4 Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.1.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.1.6 No restringe	NI	NI	NI	NI	NI	NI	X
		6.1.7 Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.1.8 Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	X
	6.2 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	6.2.1 La muestra con errores lógicos							X
		6.2.2 La muestra correctamente		X	X	X		X	
		6.2.3 No muestra	X				X		
		6.2.4 Usa restricciones completas		X	X	X	X	X	
		6.2.5 Usa restricciones incompletas							X
		6.2.6 No restringe	X						
		6.2.7 Define unilateralmente		X		X	X	X	
		6.2.8 Define bilateralmente	X		X				X
	6.3 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	6.3.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.3.2 La muestra correctamente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.3.3 No muestra	NI	NI	NI	NI	NI	NI	X
		6.3.4 Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.3.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.3.6 No restringe	NI	NI	NI	NI	NI	NI	X
		6.3.7 Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
		6.3.8 Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	X
	6.4 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$	6.4.1 La muestra con errores lógicos							
		6.4.2 La muestra correctamente							
		6.4.3 No muestra	X	X	X	X	X	X	X
		6.4.4 Usa restricciones completas		X	X	X	X	X	X
6.4.5 Usa restricciones incompletas									
6.4.6 No restringe		X							
6.4.7 Define unilateralmente			X		X	X	X	X	
6.4.8 Define bilateralmente		X		X					
6.5 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$	6.5.1 La muestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
	6.5.2 La muestra correctamente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
	6.5.3 No muestra	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
	6.5.4 Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI	
	6.5.5 Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI	

	6.6 $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	6.5.6 No restringe	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI
		6.5.7 Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI
		6.5.8 Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI
		6.6.1 La demuestra con errores lógicos					NI		NI
		6.6.2 La demuestra correctamente			X		NI		NI
		6.6.3 No demuestra	X	X		X	NI	X	NI
		6.6.4 Usa restricciones completas		X	X	X	NI	X	NI
		6.6.5 Usa restricciones incompletas					NI		NI
		6.6.6 No restringe	X				NI		NI
	6.6.7 Define unilateralmente		X		X	NI	X	NI	
	6.6.8 Define bilateralmente	X		X		NI		NI	
	6.7 $\sqrt[n]{a^n} = a$	6.7.1 La demuestra con errores lógicos							
		6.7.2 La demuestra correctamente							
		6.7.3 No demuestra	X	X	X	X	X	X	X
		6.7.4 Usa restricciones completas		X	X	X	X	X	X
		6.7.5 Usa restricciones incompletas							
		6.7.6 No restringe	X						
		6.7.7 Define unilateralmente	X	X		X	X	X	
		6.7.8 Define bilateralmente			X				X
	6.8 $(\sqrt[n]{a})^n = a$	6.8.1 La demuestra con errores lógicos							
		6.8.2 La demuestra correctamente							
		6.8.3 No demuestra	X	X	X	X	X	X	X
		6.8.4 Usa restricciones completas		X	X	X	X	X	X
		6.8.5 Usa restricciones incompletas							
		6.8.6 No restringe	X						
		6.8.7 Define unilateralmente	X	X		X	X	X	X
		6.8.8 Define bilateralmente			X				
	6.9 $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	6.9.1 La demuestra con errores lógicos					NI		NI
		6.9.2 La demuestra correctamente					NI		NI
		6.9.3 No demuestra	X	X	X	X	NI	X	NI
		6.9.4 Usa restricciones completas		X	X	X	NI	X	NI
		6.9.5 Usa restricciones incompletas					NI		NI
		6.9.6 No restringe	X				NI		NI
6.9.7 Define unilateralmente		X	X		X	NI	X	NI	
6.9.8 Define bilateralmente				X		NI		NI	
7.1 Racionalización		7.1.1 Sólo de denominadores	X	X	X	X	X	X	X
	7.1.2 De numeradores y denominadores								
	7.1.3 Restringe		X		X		X		
	7.2 Ecuaciones cuadráticas	7.2.1 Conduce al error $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a} = \pm b$							
		7.2.2 Establece correctamente que $x^2 = a$, entonces, $x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$	X	X	X	X	X	X	X
		7.2.3 Restringe		X		X		X	

7.3 Ecuaciones con radicales	7.3.1 Explica sobre transformaciones algebraicas no equivalentes		NI	X	NI		NI	NI
	7.3.2 Comprueba las soluciones y selecciona sólo las que corresponden	X	NI	X	NI	X	NI	NI
	7.3.3 Comprueba las soluciones y las separa en soluciones y soluciones ajenas		NI		NI		NI	NI
	7.3.4 Estudia las restricciones antes de resolver		NI		NI		NI	NI
7.4 Números Complejos	7.4.1 Trasciende el error del doble signo	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI
	7.4.2 Admite la notación con el radical sólo para la raíz real no negativa	NI	NI	NI	NI	NI	NI	NI
7.5 Teorema de Pitágoras		X	X	X	X	X	X	X
7.6 Irracionalidad		X	X	X	X	X	X	X

Perfil del Saber a Enseñar tercer período.

Con la información de la matriz Mr anterior, intentaré construir el Perfil del Saber a Enseñar en el tercer período. Para tal propósito se han organizado los datos en la siguiente tabla, en la cual se ha seleccionado de la matriz de resumen las tendencias de los datos. Cabe recordar que el Perfil de esta forma se escoge por medio de los campos con sus respectivos aspectos y sub – aspectos que aparecen con mayor frecuencia, como también se destaca lo que no ocurre, como el complemento de lo que sí se da pero en un porcentaje de corte menor al 50%.

Algunos elementos notables de la muestra son:

1. En este período todos los libros de texto están dirigidos al 3° año de educación media.
2. 4 de los 7 libros ganaron la licitación ministerial, por tanto hay un importante número de textos escolares en este período que han sido seleccionados y escogidos por el Ministerio de Educación.
3. Predominan los autores que son profesores universitarios con postgrados en Matemáticas, pocos son profesores de matemáticas sin postgrado y sólo uno de los autores está vinculado a la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Tabla 7.9. Perfil de Saber a enseñar en el tercer período.

Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces	100
	No se utiliza el nombre de radical	100
	No utiliza el nombre de irracional	72
	No se presenta el error del doble signo	100
	Restringe completamente.	100
4. Introducción al concepto	Planteamiento Inductivo.	72
	Introduce el concepto como inversa de la potenciación.	86
	No aparece la introducción como potencia de exponente fraccionario	100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical	72
	Utiliza el valor absoluto	100
	Utiliza la notación de potencia	100
	Representa como función	100
6. Propiedades de los radicales	6.1 La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$ no es tratada	86
	6.2 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ si es tratada	100
	- La demuestra correctamente	100
	- Restringe completamente	57
	- Enuncia unilateralmente	72
	6.3 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$ no es tratada	57
	6.4 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ es tratada	86
	- No la demuestra	100
	- Restringe completamente	86
	- Enuncia unilateralmente	72
	6.5 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$ no es tratada	100
	6.6 La propiedad $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$ es tratada	72
	- No la demuestra	80
	- Restringe completamente	80
	- Enuncia unilateralmente	60
6.7 La propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$ es tratada	100	
- No la demuestra	86	
- Restringe completamente	72	
- Enuncia unilateralmente	100	
6.8 La propiedad $(\sqrt[n]{a})^n = a$ es tratada	100	
- No la demuestra	86	
- Restringe completamente	72	
- Enuncia unilateralmente	72	
6.9 La propiedad $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	100	
- No la demuestra	80	
- Restringe completamente	72	
- Enuncia unilateralmente	72	

7. Aplicaciones de los radicales	7.1 La Racionalización es tratada	100
	- Sólo de denominadores	100
	- No restringe	57
	7.2 Las Ecuaciones cuadráticas son tratadas	100
	- Resolución correcta	100
	- No restringe.	57
7.3 Las Ecuaciones con radicales no son tratadas	57	
7.4 Números Complejos no son tratados	100	
7.5 Incorpora el Teorema de Pitágoras.	100	
7.6 Incorpora el problema de la Irracionalidad.	100	

En el capítulo 8, con este Perfil y los otros de los dos períodos, se construirá al confrontarlos de forma modal, la Caracterización del Saber a Enseñar de los radicales en los libros de texto.

Antes de concluir, mostraré a modo de listado, algunos complementos del Perfil establecido.

En el período de 2001 a 2009, se observa según la tendencia en los libros de texto que:

1. Se instala correctamente el concepto de radical o raíz aritmética o principal, por lo que no se presta al error del doble signo.
2. El tratamiento es inductivo. En cada texto (excepto 1c) obedeciendo al programa ministerial, se inicia el estudio de los radicales cuadráticos, luego los cúbicos y se extrapola para los de orden n .
3. Se favorece al uso de diversas representaciones: con el signo radical, con valor absoluto para identificar $\sqrt{a^2} = |a|$, la notación de potencia $a^{\frac{p}{q}}$ y las expresiones algebraicas, tabulares y gráficas correspondientes a las funciones radicales de segundo y tercer orden, lo que se propicia desde el programa ministerial.
4. Ocurren fenómenos netamente matemáticos, como:
 - a) La divulgación unilateral del signo igual que se advierte en el tratamiento de algunas propiedades, especialmente las referidas al producto y cuociente de radicales. No se considera de este modo la faceta algebraica del signo igual

como relación de equivalencia, y por tanto se viola en su transposición didáctica la propiedad simétrica de la igualdad.

b) El tratamiento de la racionalización únicamente como técnica para “convertir el denominador irracional en racional”. He aquí dos precisiones en la que me detendré un momento:

b.1) El acto de Racionalizar, viene garantizado por la amplificación de expresiones fraccionarias, asegurando la obtención de otra expresión que mantenga inalterable el número concreto o abstracto¹⁰ representado. En los libros de texto, se favorece a la técnica, pero no se problematiza necesariamente para su comprensión vista como una transformación algebraica (cambio de aspecto pero no de objeto representado). Las frases “hacer desaparecer” o “eliminar las raíces” o “hacer racional un irracional” desfavorecen la apropiación del concepto de racionalizar EL denominador o EL numerador. Se enfatiza mucho el proceso pero no se discute su sentido.

b.2) Las técnicas de racionalización, son todas aplicadas al denominador de una fracción, mediante una justificación válida en la época en que los cálculos se debían efectuar *a mano*. Con la existencia de las calculadoras,

efectuar la división indicada por $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ no es una tarea complicada. El

álgebra clásica elemental, como lo demuestra su historia, está marcada por el fuerte juego de transformaciones algebraicas, algunas lógicamente equivalentes (reversibles) y otras que no lo son. Este enfoque no es trabajado en los libros de este período, y se quedan sólo a nivel de fracciones numéricas con denominadores con ciertos modelos de radicales a los que se les aplica alguna técnica. La pregunta que se levanta es ¿Y la racionalización de numeradores?. Un buen ejemplo concreto es nuevamente

¹⁰ Las nociones de número concreto y número abstracto son utilizados acá para diferenciar entre un número conocido y un número generalizado, este último habitualmente representado por una letra.

apelar al sentido de la propiedad simétrica de la igualdad. Lo habitual es racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de modo que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si ahora se aplicara el mismo método pero al numerador de $\frac{\sqrt{2}}{2}$, se podría verificar que la primera racionalización es correcta. Por lo demás, hay otros algoritmos situados en otras partes de las matemáticas que requieren de racionalizaciones sea en el numerador o denominador de una fracción, como el cálculo de límites.

5. La relación Radical – Potencia se establece en la tendencia, con rupturas en el discurso, que no son aclaradas. Se estudian con las debidas restricciones la raíz cuadrada positiva y se extrapola para otras de índice par. Cuando se presenta la raíz cúbica, se puede inferir lo que ocurre para las de índice impar, aceptando radicandos reales cualesquiera, que es correcto como dominio de la familia de funciones $f(x) = \sqrt[n]{x}$ de parámetro n impar, sin embargo, cuando se establece la relación $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, se indica también correctamente que $x > 0$. El fenómeno detectado es que aparece como ruptura que se halla establecido que para la expresión radical pueda permitirse valores negativos para x (siempre que se tenga índice impar), pero no son permisibles para la notación de potencia. El juego que se juega es confuso, pues para $\sqrt[3]{a}$, se indica que el radicando puede ser cualquier número real. Más adelante cuando se presenta la “raíz enésima” como es llamada en los textos, se exhibe que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ sólo para $a > 0$, siendo que n es un natural mayor que 1. No se entra en detalle de por qué esta limitación, y es más, a enseñar que el signo igual en este caso no siempre funciona, pues debe ocurrir que los radicandos sean positivos para expresar el radical como potencia, sin embargo, no está esto intencionado en ninguna parte.

6. Las demostraciones de los teoremas no son materia de estudio en este período. Los autores no realizan demostraciones, sólo verificaciones y sólo la presentan para una de las propiedades.

En el capítulo siguiente, expondré los perfiles de los tres períodos estudiados para producir la triangulación entre ellos y levantar la caracterización del Saber a Enseñar propuesto en la muestra de los 20 libros de texto y dar paso de esta forma a las conclusiones de esta investigación.

PARTE III

RESULTADOS

Y

CONCLUSIONES

CAPITULO 8

Resultados y Conclusiones

8.1 Introducción.

Se ha llegado al final de esta investigación, pero no por ello se ha agotado el análisis de lo que aquí se ha registrado, pues es probable que como toda obra humana se tenga la divina posibilidad de un reparo infinito, que da la agudeza formada por la evolución del pensamiento en base a la reflexión continua. Por tanto, las conclusiones que se muestran en este capítulo, son las consensuadas al nivel que se puede llegar en el presente, pero que nutren de múltiples proyecciones en el futuro.

Es así como previamente a desarrollar este capítulo, expongo la satisfacción que me ha dado colocar un grano de arena en la construcción de una incipiente línea de investigación en Chile y que en otros países ya llevan algunos años en su gestación. Me refiero al Análisis de Libros de Texto, línea que en España, por ejemplo, cuenta con tesis doctorales y de maestría en el área de la Didáctica de las Matemáticas. Al respecto, cito un extracto de una conferencia muy reciente del último Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM:

“...hablar de los manuales escolares es hablar del paradigma del saber institucionalizado en el sistema educativo, del currículum realmente implementado y del modelo de organización y planificación de la enseñanza dominante en el tiempo en el que han estado vigentes... se puede enfocar el análisis de los manuales escolares, como una línea más de la investigación en didáctica de las matemáticas”. (Gómez, 2009)

Es esperable de este modo, que esta tesis se convierta en un aporte para producir investigación en el ámbito del análisis del Saber Matemático divulgado y de todas las transformaciones que se realizan para hacerlo comunicable a diversos destinatarios y establecer la importancia de ejercer la vigilancia epistemológica por todo aquel que enseña, lo que claramente pone en alerta la existencia de un vacío en la formación del profesorado de matemáticas.

Este capítulo será iniciado con el apartado 8.2 en el que se resumen los principales resultados aportados en el capítulo 4, respecto del contexto en que surgen los programas curriculares de cada reforma y luego retomando la Caracterización del Saber a Enseñar Oficial sobre el álgebra de radicales que cerró el mencionado capítulo.

Posteriormente, en el apartado 8.3 se efectúa la triangulación de los tres Perfiles del Saber a Enseñar relativo al álgebra de radicales en los libros de texto, con el propósito de dar origen a la Caracterización CSaEt que represente a todo el período en estudio (1969 – 2009).

En el apartado 8.4. las caracterizaciones CSaEp y CSaEt se triangulan con el Saber Sabio SS, lo que dará lugar a las conclusiones finales respecto de los objetivos planteados y las hipótesis de trabajo en el apartado 8.5.

El apartado 8.6. de este capítulo muestra conclusiones y recomendaciones referidas a la metodología empleada y cómo ésta puede convertirse en un micro modelo para el análisis de libros de textos para un determinado objeto matemático en toda su especificidad.

Finalizo este trabajo de tesis con las proyecciones y aportes que pueda significar esta investigación, en el apartado 8.7.

8.2. Resultados locales de la revisión de Programas.

Algunos de los elementos centrales que destacar, se condicen con las diferencias entre los 3 programas analizados. El primero de 1969 de segundo año medio, instala un paradigma estructuralista predominando hasta inicios de los años 80', como herencia directa de la reforma mundial de las matemáticas modernas. El segundo programa de

1982, trae consigo una visión mecanicista de las matemáticas, donde prevalece la reproducción, la ejercitación por sobre la problematización, mientras que en el tercer programa, tienden a aparecer situaciones contextuales reales dentro de una idea de matematizar, esto es, ver dónde están las matemáticas en el mundo.

Las diferencias se concentran además en algunos aspectos explicitados. Por ejemplo, la obligatoriedad de incluir demostraciones en el primer programa, disminuye en el segundo y queda a juicio del profesor en el tercero.

De las propiedades en tanto, se explicitan las de multiplicación y división de radicales. Sólo el estructural programa del primer período incorpora las restricciones. Finalmente en el programa 2 y 3, se explicita el estudio de las ecuaciones con radicales.

En cuanto al contenido, la caracterización del Saber a Enseñar en los programas se organiza en la tabla siguiente:

Tabla 8.1 Caracterización del Saber a Enseñar Oficial (1969 – 2009)

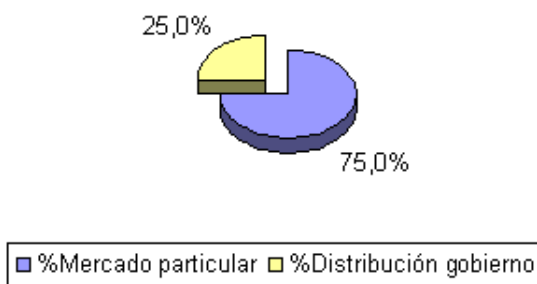
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces	100
	Restringe completamente.	66,6
4. Introducción al concepto	Planteamiento Deductivo.	66,6
	Introduce implícitamente como inversa de la potenciación.	100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical	100
	La notación de potencia	100
6. Propiedades de los radicales	Multiplicación y división de radicales de igual índice.	100
	No demuestra	100
	Restringe completamente	66,6
	Enuncia unilateralmente.	66,6
7. Aplicaciones de los radicales	• Racionalización sólo de denominadores, sin restricciones.	100
	• Resolución correcta de ecuaciones cuadráticas, sin restringir.	100
	• Ecuaciones con radicales sin mayor información.	
	• Ecuaciones con radicales con tratamiento correcto.	33,3
	• Teorema de Pitágoras.	33,3
	• Irracionalidad.	66,6
		100

Se puede constatar cuáles son las tendencias que serán trianguladas con la Caracterización del Saber a Enseñar del álgebra de radicales presente en los libros de texto.

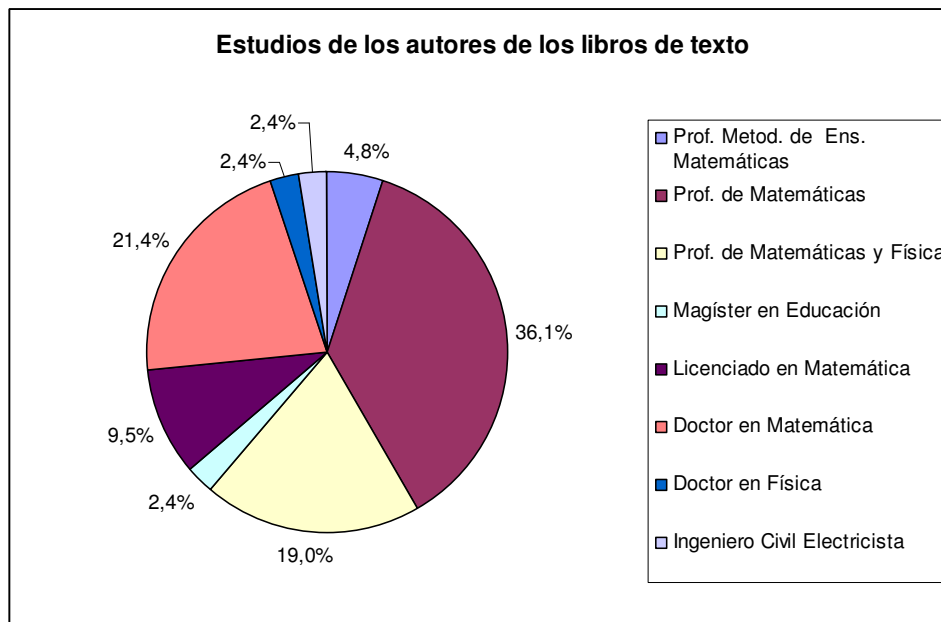
8.3. Caracterización del Saber a Enseñar en los libros de texto.

Para entrar en las conclusiones del Saber a Enseñar de los libros de texto, previamente levantaré algunos resultados relacionados con la matriz de identificación general MIGt y que dan el contexto a los resultados relativos al contenido.

TEXTOS PERIODOS 1, 2 y 3
MIGt: Procedencia



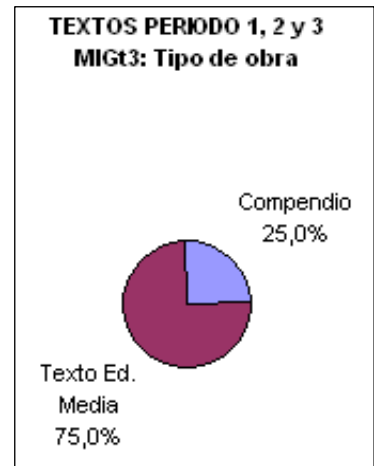
La cuarta parte de los textos escolares han sido distribuidos por el Ministerio de Educación. Esto se justifica por el sesgo que se debe advertir, ya que ese 25% lo coloca el tercer período, pues los otros dos no cuentan con políticas de reparto de libros gratuitos para los estudiantes de enseñanza media. En cuanto a la formación académica de los autores, el resultado global está dado por el siguiente gráfico:



Quienes más han participado como autores de libros de texto de matemáticas son los propios profesores del ramo con un 36,1%. Le sigue con un 21,4 % los doctores en matemáticas pero esto no es tan así. En efecto, aquí figuran repetidos algunos autores por tener un libro que ha ganado 3 veces seguidas la licitación, como ocurre con la editorial Mare Nostrum. Nótese que entre los profesores (de matemática y de matemática y física, suma un 55,1% y los doctores junto licenciados, están en el 30% con esta salvedad.

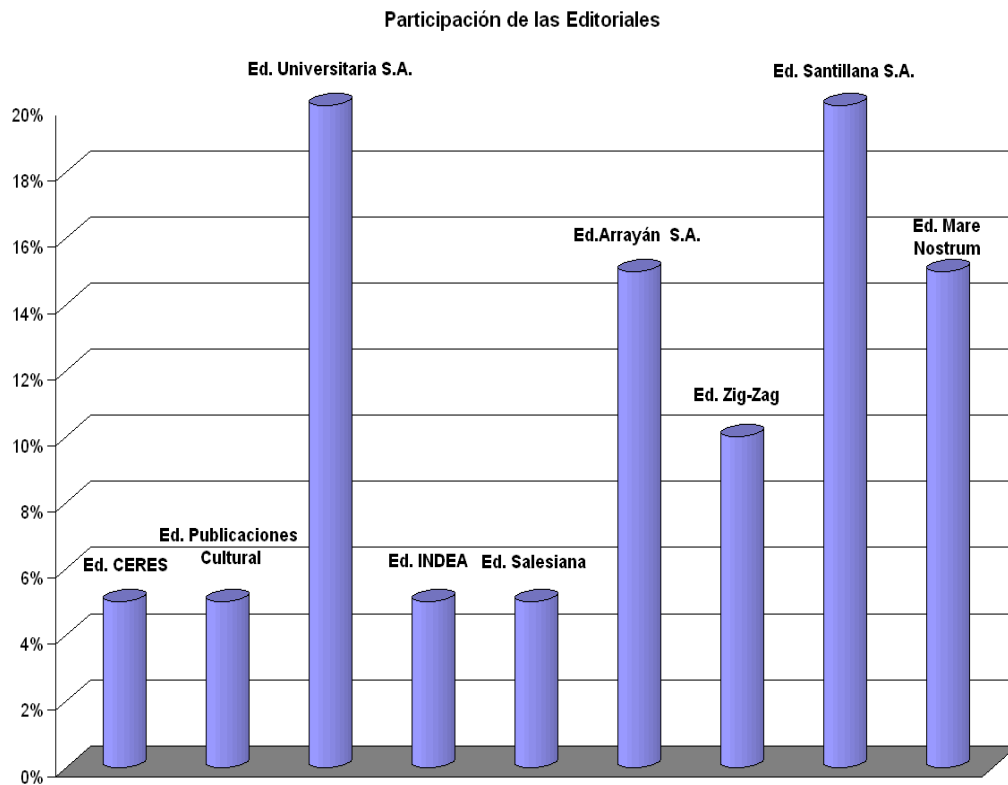
Por otra parte, la incorporación de doctores al campo de la educación es muy reciente, y sólo aparecen en el tercer período. Previo a eso, la gran mayoría son profesores de enseñanza media en matemáticas.

Los compendios han perdido terreno en cantidad. En efecto, en el tercer período ya no hay ninguno. Así es como se muestra en el gráfico de la derecha, donde los libros dirigidos a cursos específicos son los más utilizados, sumando a eso que empleados o no en el aula escolar, desde hace una década ya se viene implementando la distribución por el MINEDUC.

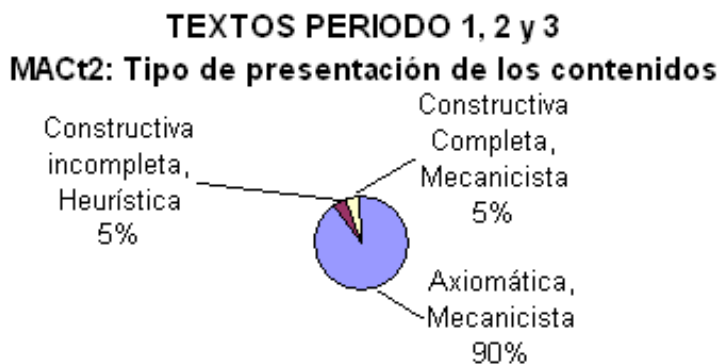


Las editoriales también se comienzan a masificar como una característica propia de los dos últimos períodos.

El gráfico siguiente da a conocer la participación de las empresas editoras en Chile:



Se observa que las editoriales Santillana y Universitaria han producido más libros de texto para la enseñanza media, seguido del inexistente Arrayán Editores, S.A., Mare Nostrum y Zig-Zag.



Los libros de texto en los 3 períodos obedecen a presentaciones estructurales y con actividades mecanicistas en el plano operativo – instrumental (Labarrere y Quintanilla, 2006).

Entrando en el terreno del contenido del álgebra de radicales, es necesario retomar los perfiles del Saber a Enseñar en los libros de texto por período, para triangularlos y elaborar la Caracterización del Saber a Enseñar del período completo, esto es, dar cuenta tanto de los invariantes como de lo que se modificó y en qué grado entre las 3 reformas.

8.4. Triangulación de las Caracterizaciones CSaEp, CSaEt con el saber sabio SS.

Por motivos prácticos y de fácil lectura, siguiendo lo que ya se hizo en los capítulos 4, 5, 6 y 7, se organiza la siguiente tabla que responde a la triangulación de los datos obtenidos por los perfiles de los libros de texto de cada período.

Tabla 8.2 Triangulación de los 3 Perfiles del Saber a enseñar por período.

Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación Período 1	Porcentaje de determinación Período 2	Porcentaje de determinación Período 3
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces	100	100	100
	No se utiliza el nombre de radical	84	86	100
	No utiliza el nombre de irracional	84	66	72
	Se presenta el error del doble signo	100	66	0
	No Restringe completamente.	84	66	28
4. Introducción al concepto	Planteamiento Deductivo.	86	100	0
	Introduce el concepto como inversa de la potenciación	100	100	100
	Introduce como potencia de exponente fraccionario	34	66	28
5. Tipos de representación es que utiliza	Utiliza el signo radical	100	100	100
	Utiliza el valor absoluto	0	14	72
	Utiliza la notación de potencia	100	86	100
	Representa como función	0	14	100
6. Propiedades de los radicales	6.1 La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$ es tratada	100	66	0
	- La demuestra incorrectamente	100	100	
	- No restringe	100	75	
	- Enuncia bilateralmente	100	100	
	6.2 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ si es tratada	100	100	100
	- La demuestra incorrectamente	66	57	0
	- No restringe	100	57	43
	- Enuncia unilateralmente	100	71	72
	6.3 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$ es tratada	50	57	0
	- La demuestra incorrectamente	100	25	
	- La demuestra correctamente	0	0	
	- No restringe	100	100	
	- Enuncia bilateralmente	100	100	
	6.4 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ es tratada	100	100	86
	- La demuestra correctamente	50	57	0
	- La demuestra incorrectamente	50	57	0
- No restringe	100	71	0	
- Enuncia unilateralmente	100	100	86	

	6.5 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}$ es tratada	0	43	0
	- No la demuestra		100	
	- No restringe		100	
	- Enuncia Bilateralmente		100	
	6.6 La propiedad $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ es tratada	50	86	100
	- No la demuestra	66	0	72
- No restringe	100	83	20	
- Enuncia bilateralmente	100	66	20	
	6.7 La propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$ es tratada	100	86	60
	- La demuestra incorrectamente	84	33	0
	- No demuestra	16	50	100
	- No restringe	100	66	100
	- Enuncia bilateralmente	100	100	14
	6.8 La propiedad $(\sqrt[k]{a})^n = a$ es tratada	100	86	72
	- No la demuestra	84	50	100
	- Restringe completamente	100	66	100
	- Enuncia unilateralmente	100	0	86
	6.9 La propiedad $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ es tratada	100	86	72
	- No la demuestra	28	50	72
	- La demuestra correctamente	50	50	0
	- No restringe	100	66	0
	- Enuncia bilateralmente	100	100	20
7. Aplicaciones de los radicales	7.1 La Racionalización es tratada	100	86	100
	- Sólo de denominadores	100	86	100
	- No restringe	100	100	57
	7.2 Las Ecuaciones cuadráticas son tratadas	100	100	100
	- Resolución correcta	100	57	100
	- No restringe.	84	71	57
	7.3 Las Ecuaciones con radicales son tratadas	50	86	43
- Explica sobre transformaciones algebraicas no equivalentes	40	34	33	
- Comprueba las soluciones y selecciona sólo las que corresponden	60	34	100	
- Comprueba las soluciones y las separa en soluciones y soluciones ajenas	20	0	0	
- Estudia las restricciones antes de resolver	20	0	0	
7.4 Números Complejos son tratados	71	0	0	
- No trasciende el error del doble signo	71			
- Admite la notación con el radical sólo para la raíz no negativa.	71			
7.5 Incorpora el Teorema de Pitágoras.	16	29	100	

	7.6 Incorpora el problema de la Irracionalidad.	66	66	100
--	---	----	----	-----

De esta información tabulada es posible concluir que:

1. En todos los períodos se ha utilizado la palabra raíz para identificar las expresiones que emplean el signo radical.
2. El error del doble signo se ha visto superado en el tiempo. En el primer período todos los libros examinados cometían el error, en el segundo en tanto, lo mantenía dos tercios de los libros revisados y en el tercer período ninguno de los textos cae en el error, y es más, algunos lo previenen haciendo actuar el valor absoluto.
3. Así como el punto anterior, la costumbre por restringir también aumenta en el tiempo. De un 84% de libros que en el primer período no emplean restricciones para la definición de raíz (entendida como principal), mejora en el segundo período alcanzando el 66% y en el tercero a un 28%.
4. Un cambio trascendental es el que ocurre con el método de presentación de los contenidos. En los dos primeros períodos es de corte deductivo lo que da un giro brusco en el tercer período donde el planteamiento es de orden inductivo, colocando énfasis en las raíces cuadradas y cúbicas.
5. Un invariante es la introducción al concepto de raíz mediante la noción de operación inversa de las potencias. El 100% de la muestra en cada oportunidad se basaba en este hecho para justificar el cálculo radical.
6. Dentro de las representaciones, éstas se han enriquecido en el tiempo. Los porcentajes muestran que el valor absoluto que no estuvo presente en el primer

período aparece tímidamente en la segunda etapa y ya en la tercera es parte del discurso de todos los libros de texto. Igualmente ocurre con la representación funcional de los radicales. En cuanto a la notación de potencia de exponente fraccionario, ésta se ha utilizado siempre por la mayoría de los textos, pero no es clara su manipulación, ya que se evidenció que en varios de los manuales escolares no se explicaba la razón por la cual se evitan las bases negativas y si se aceptaban en la notación de radical.

7. De las propiedades de los radicales, se puede notar que hay algunas que en el tercer periodo han quedado fuera del currículo. Ahora bien, la pregunta inmediata es ¿Cuáles han permanecido en el tiempo?. Esencialmente, son la del producto y cociente de radicales, el radical de un radical y también las siguientes: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, $\sqrt[n]{a^n} = a$ y $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Las demostraciones han quedado algo olvidadas, del primer período que eran obligadas, ahora ya no se consideran necesarias, pero queda por superar aún la omisión de las restricciones o campos de validez donde funcionan estas propiedades.

8. Existen fenómenos que conducen a rupturas entre la matemática y la matemática escolar. En el tratamiento de las propiedades de multiplicación y división de radicales son por lo general y en todos los períodos tratados unilateralmente, concibiendo el signo igual en un ambiente aritmético y no algebraico, sin su propiedad de simetría, como relación de equivalencia en un conjunto. Por otra parte, estas propiedades cuando son demostradas, otro invariante que aparece en la mayoría de las veces es la espuria demostración que algunos autores hacen, basándose en las propiedades de las potencias con el grave error matemático de utilizar teoremas no demostrados con anticipación, dotando a la demostración o prueba formal de una génesis artificial que extiende la brecha entre el Saber Erudito de referencia y el Saber Transpuesto, creando una ruptura epistemológica que no se ha subsanado con el tiempo, al igual que el caso de la unilateralidad.

9. La racionalización es también tratada en todos los períodos y en casi todos los libros revisados, sus técnicas son aplicadas sólo al denominador. Esta es una versión reduccionista que no permite la reversibilidad. Si se aplica la racionalización al denominador de una fracción, el paso inverso está en la racionalización del numerador para reconstruir la expresión original. Este punto de vista no está presente en todos los períodos y esta temática se centra de modo operativo con algunas justificaciones poco adecuadas como la antigua argumentación de la necesidad de racionalizar para comparar fracciones, lo que es válido en un mundo sin calculadoras y computadores y que por cierto le era de mucha utilidad a los calculistas antiguos.
10. Al observar el álgebra de radicales, se puede concluir que la mirada actual (previo a lo que depare el proceso de ajuste curricular que está por iniciarse y conocerse más detalles al momento de culminar esta tesis) reduce el estudio algebraico de los números abstractos o literales a números concretos, lo que permite si entender por ejemplos precisos las propiedades en este caso de los radicales, pero no permite la manipulación algebraica que es de suponer y discutir es una de las razones de su enseñanza e inclusión en el currículo.

Corresponde ahora que ya se tiene la triangulación de los tres Perfiles construir la Caracterización del Saber a Enseñar en los Libros de Texto. Para ello se ha decidido indicar el porcentaje promedio como representante de la tendencia central, para el caso de los campos que tengan una presencia del 40% o más en cada uno de los tres períodos. En la tabla 8.3, se evidencian los resultados.

Caracterización del Saber a Enseñar en los libros de texto (1969 – 2009)

Tabla 8.3 Caracterización CSaEt (1969 – 2009)

Variable Observada	Descripción	% Promedio de determinación
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces	100
4. Introducción al concepto	Introduce el concepto como inversa de la potenciación	100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical	100
	Utiliza la notación de potencia	95,3
6. Propiedades de los radicales	6.2 La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ si es tratada - No restringe - Enuncia unilateralmente	100 66,6 57,6
	6.4 La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ es tratada - No restringe - Enuncia unilateralmente	95,3 57 95,3
	6.6 La propiedad $\sqrt[\sqrt[n]{a}]{} = \sqrt[n]{a}$ es tratada	78,6
	6.7 La propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$ es tratada - No demuestra - No restringe - Enuncia bilateralmente	82 55,3 88,6 71,3
	6.8 La propiedad $(\sqrt[n]{a})^n = a$ es tratada - No la demuestra - Restringe completamente	86 78 86,6
	6.9 La propiedad $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ es tratada - No la demuestra	86 78
	7. Aplicaciones de los radicales	7.1 La Racionalización es tratada - Sólo de denominadores - No restringe
7.2 Las Ecuaciones cuadráticas son tratadas		100
7.3 Las Ecuaciones con radicales son tratadas		59,6
7.4 Incorpora el problema de la Irracionalidad.		77,3

Se está en condiciones de realizar ahora la triangulación final entre CSaEp y CSaEt. Para tal situación se confrontarán estas dos caracterizaciones y luego, se comentarán estos resultados a la luz del Saber Sabio.

Triangulación Final

Tabla 8.4 Triangulación de CSaEp y CSaEt

Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación Programas	Porcentaje de determinación Libros de texto
3. Uso del signo radical	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces Restringe completamente.	100 66,6	100 30,7
4. Introducción al concepto	Introduce implícitamente como inversa de la potenciación.	100	100
5. Tipos de representaciones que utiliza	Utiliza el signo radical La notación de potencia	100 100	100 95,3
6. Propiedades de los radicales	Multiplicación y división de radicales de igual índice. Enuncia unilateralmente.	100 66,6	100 57,6
7. Aplicaciones de los radicales	<ul style="list-style-type: none"> • Racionalización sólo de denominadores, sin restricciones. • Resolución correcta de ecuaciones cuadráticas, sin restringir. • Irracionalidad. 	100 100 100	95,3 100 77,3

Conclusiones de la triangulación anterior desde el Saber matemático de referencia.

A partir de los datos obtenidos en la triangulación entre las Caracterizaciones del Saber a Enseñar promulgado en los Programas Oficiales (CSaEp) y el propuesto en los libros de texto (CSaEt), es posible concluir que en ambas fuentes a lo largo del período 1969 – 2009, muestran las siguientes tendencias:

1. Uso del signo Radical: Llamar “raíces” a las expresiones que emplean el signo radical $\sqrt{\quad}$. El matiz lo colocan los programas del primer y tercer período, según se estableció en el apartado 4.5.2, que explicitan utilizar este signo bajo las restricciones que demanda el Saber Erudito de referencia. Por tal razón, el 66,6%, esto es los dos tercios de los programas establecen las restricciones como ha de ser en el Saber Matemático. En los libros de texto, en cambio la situación es distinta y prácticamente opuesta (mirado en su globalidad): Sólo un 30,7% utiliza los campos de validez en forma completa, lo que pone una alarma respecto a la divulgación y abre la brecha del Saber a Enseñar como una construcción inadecuada en la mayoría de los manuales escolares de la muestra. Sólo en este punto se puede observar que la mayoría de los textos que están en el 30,7 % pertenecen al tercer período como se puede ver en el apartado 7.3, lo que significa que en el tercer período se ha dado un vuelco favorable. Por tanto, un profesor que como mayor bibliografía para su uso particular considera libros de texto previos al año 2000, estará en mayor riesgo de contraer el concepto de raíz con el fenómeno del doble signo.
2. Introducción al Concepto: La tendencia marcada es introducir el concepto de radical o como se hace en la práctica, de raíz aritmética o simplemente raíz en su versión errónea, haciendo uso de las potencias, apareciendo el concepto de operación inversa. En el tratamiento algebraico de los radicales, que es el enfoque que se ha procurado considerar en esta tesis, no se puede mantener el concepto de operación inversa, pues al considerar los números negativos se llega a la concepción errónea que justifica el fenómeno del doble signo, razonando que: $\sqrt{4} = \pm 2$ por que tanto 2 como -2 tienen por cuadrado al 4, confundiendo con lo que en el Saber Matemático es encontrar aquellos números reales x que satisfacen la ecuación pura $x^2 = 4$, llamados *raíces cuadradas de 4*, por lo que el operador $\sqrt{\quad}$ tiene su empleo limitado a los números reales no negativos, tanto en su dominio como en su recorrido. Cabe entonces indicar que es necesario

reforzar la concepción de “operación inversa”, que por efectos de inyectividad debe restringirse para el caso del operador radical como se ha señalado para no desvirtuar el concepto matemático de operación monaria en este caso y de radical o raíz aritmética o principal de un número real no negativo.

3. Tipos de representaciones que utiliza: Dos son las representaciones a las que convergen en alto porcentaje de uso los programas y libros de texto. El empleo del signo radical y la notación de potencia. En el Saber Sabio también son las dos notaciones que se pueden emplear para simbolizar el radical de un número real, sin embargo, un primer fenómeno advertido está en la ausencia de restricciones para utilizar estas representaciones. En el Saber Matemático:

“Para todo número real $x > 0$ y cada entero $n > 0$, hay un número real $y > 0$, y

uno sólo, tal que $y^n = x$. Este número y se escribe $\sqrt[n]{x}$, o $x^{\frac{1}{n}}$ ”.(Rudin, 1971)

La ruptura con el saber escolar está en que se hacen extensiones a cantidades subradicales negativas para índices impares y esta distinción acarrea por ejemplo

el abuso de notación $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}}$, en oposición al saber matemático referencial.

A pesar que en algunos pocos libros de texto la situación está bien definida

cuando señalan que “para un número positivo cualquiera a , denotaremos $\sqrt[n]{a}$, o

también $a^{\frac{1}{n}}$, aquel único número positivo cuya n – ésima potencia es a ”, se

observa una contradicción con el discurso previo, en que han definido que “Todo número a , positivo, negativo o nulo, tiene una única raíz cúbica que denotamos

$\sqrt[3]{a}$, cuyo cubo es a y que tiene el mismo signo que a ”. Este ejemplo fue

tomado como muestra del texto 6c, que es uno de las fuentes más rigurosas.

4. Propiedades de los radicales: Las únicas propiedades que permanecen invariantes en los libros y en los programas corresponde a la multiplicación y división de radicales de igual orden. El mayor fenómeno respecto del saber matemático aquí

encontrado, es lo que he denominado tratamiento unilateral de estas propiedades, puesto que se en el edificio matemático estos teoremas como se mostró en el apartado 2.8.2, se enuncian así: $a, b \in R, ab \geq 0, n \in N \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \sqrt[n]{|b|}$ y su

corolario: $a, b \in R, b \neq 0, \frac{a}{b} \geq 0, n \in N \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$ (Martín et al., 1990). En

cambio en la matemática escolar, aparece el fenómeno de la unilateralidad que separa en 2 propiedades al teorema y en 2 propiedades también a su corolario, obteniéndose las conocidas 4 propiedades llamadas

- Multiplicación de raíces de igual índice
- Raíz de un producto
- División de raíces de igual índice
- Raíz de un cociente.

La opción para transponer de esta forma el saber erudito en el saber a enseñar comete la falla de una interpretación aritmética y no algebraica del signo igual como relación de igualdad en un conjunto, en este caso el de los números reales positivos, olvidando su carácter (insito) algebraico como relación de equivalencia definida en un conjunto A, de modo que $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A): a = a$ (reflexividad)

$$a = b \Rightarrow b = a \text{ (Simetría)}$$

$$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c \text{ (transitividad).}$$

De modo que lo que se viola en esta transformación para convertir el Saber matemático en Saber a Enseñar es la propiedad de simetría que tiene la igualdad en el terreno algebraico.

5. Aplicaciones de los Radicales: Hay temáticas que siempre han estado presentes en la ecología de los radicales como aplicaciones, es decir, donde los radicales toman el estatus de objeto – herramienta o paramatemático. Estos son: La

racionalización, la resolución de ecuaciones de segundo grado y la irracionalidad. Respecto a la racionalización, esta aparece ligada a aplicar sus técnicas a los denominadores y en una minoría de los libros de texto que alcanza al 4,7% lo aplica a los numeradores. Se tiene nuevamente otra ruptura aquí con el saber erudito, pues nuevamente se asoma un efecto similar al de la unilateralidad, pues por ejemplo, de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se llega a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pero no hay modo de “devolverse” o de verificar el proceso por reversibilidad del mismo, lo que afecta nuevamente al concepto de igualdad y su propiedad simétrica, pues se enseña a ir “de izquierda a derecha” pero no a deshacer este camino con la racionalización del numerador, lo que es una técnica más de las que consiguen transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes, pero divulgada en forma reduccionista en la matemática escolar.

La resolución de ecuaciones cuadráticas y el problema de la irracionalidad no presentan problemáticas globales que destacar como conclusión de esta triangulación. Si las hay de orden local, las que se denuncian en los apartados 5.3, 6.3 y 7.3.

Cabe enfatizar que estos hallazgos constituyen un problema de estudio para la Didáctica de las Matemáticas, puesto que como se ha podido apreciar con la reconstrucción histórica epistemológica incluida en esta tesis en el apartado 2.8, en el edificio matemático el problema está resuelto.

Otro elemento a destacar es cómo este estudio impacta la formación de profesores y pone en alerta la necesaria reflexión sobre las siguientes interrogantes:

1. ¿Se forman profesores de matemáticas con el Saber Didáctico y el Saber Matemático requerido y debidamente articulado para analizar las fuentes de donde toman información como apoyo a sus clases, especialmente libros de texto?

2. ¿Qué variables consideran los profesores de matemáticas al momento de escoger un libro de texto para sus clases?

3. ¿Qué rol juega en la formación docente de profesores de matemáticas la epistemología de su disciplina?

Con este conjunto de preguntas, se pretende dejar la inquietud planteada de una discusión pendiente y que se relaciona con alguno de los Saberes ausentes o poco presentes en la hoy cuestionada formación de maestros de matemáticas, colocando un grano de arena al debate sobre una temática emergente: las competencias en la formación inicial y continua del profesorado de Matemáticas.

8.5. Conclusiones específicas respecto a los Objetivos e Hipótesis.

Corresponde en este apartado determinar si se cumplieron los objetivos propuestos, como también determinar si todas o algunas de las hipótesis de investigación pueden ser aceptadas o bien si alguna se rechaza.

Respecto de los Objetivos planteados

El objetivo general “Identificar y caracterizar el tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto mediante un análisis conceptual y de contenido durante el período 1969 - 2009 en Chile”, ha sido alcanzado en plenitud, logrando establecer **Perfiles** por subperíodos dados por los cambios curriculares oficiales y elaborando **Caracterizaciones** como se encuentra en los apartados 4.5, 5.3, 6.3, 7.3, 8.3 y 8.4 mostrando así resultados y conclusiones locales y de conjunto.

En relación a los objetivos específicos:

Objetivo OE1:

Se puede establecer las diferencias paradigmáticas entre los marcos curriculares de las reformas educacionales en Educación Matemática, identificándolas por medio del tipo de presentación de los contenidos del siguiente modo:

Primer período (1969 a 1981) obedece a una corriente que podría denominar como estructuralista, pues con la llegada de la reforma de las matemáticas modernas se instalan en la enseñanza escolar duros conceptos matemáticos, cuyo propósito era divulgar una matemática rigurosa, abstracta y alejada de la realidad, esto es, matemáticas por las matemáticas, fundamentado en el estructuralismo matemático y en un contexto en que predomina el conductivismo.

En el segundo período (1982 a 2000) se instala una concepción más mecanicista. Interesa que los estudiantes automaticen reglas. Los programas son muy ligeros y sólo informan de objetivos y contenidos vinculados a un plano instrumental, con base conductivista.

El tercer período (2001 a 2009) instala la necesidad de enseñar por medio de situaciones de contexto. El paradigma global basado en el constructivismo, muestra aplicaciones de los objetos matemáticos, en el afán de dotarlos de significado real.

Puede evidenciarse esto en los programas que a diferencia de los anteriores incluyen orientaciones metodológicas y una serie de actividades y ejemplos con indicadores para el profesor, incluso en el proceso evaluativo.

Objetivo OE2:

Este objetivo fue alcanzado y descrito en sus resultados los apartados 4.5, 5.3, 6.3, 7.3, donde se especifica cuáles son las propiedades que en cada período son

trabajadas y en relación a su permanencia en el tiempo, se estableció que las únicas que invariantes en su tratamiento son la Multiplicación y división de radicales.

Objetivo OE3:

Puede verse el desarrollo de este objetivo y sus alcances en los apartados locales 4.5, 5.3, 6.3, 7.3 y globalmente en el apartado 8.4, en los cuales se encontró que las representaciones más utilizadas son las que proveen del signo radical y de la notación de potencia de exponente fraccionario.

Objetivo OE4:

Se encontró que hay un buen número de fuentes que omiten las demostraciones, otras las efectúan correctamente y en gran número comenten errores de tipo lógico – deductivo, pues se basan en las propiedades de las potencias probadas para exponentes enteros pero no fraccionarios. También se encontró que el programa del primer período explicita la necesidad de demostrar estos teoremas, el segundo programa no se pronuncia al respecto, mientras que el tercero lo sugiere sólo si el docente lo amerita. El detalle de este objetivo se encuentra en los apartados 4.5, 5.3, 6.3, 7.3 y 8.4

Objetivo OE5:

La ecología de los radicales que permanece invariante en el tiempo la constituyen las potencias como conocimiento previo, la racionalización aplicada sólo a los denominadores, la resolución de la ecuación cuadrática y el problema de la irracionalidad. El detalle se encuentra en los apartados 4.5, 5.3, 6.3, 7.3 y 8.4

Objetivo OE6:

Se concluye que en los dos primeros períodos aparece el error del doble signo en demasía, pero bruscamente superado por la mayoría de las fuentes del tercer período. También se observaron otros errores vinculados a la omisión o incompletitud de los

campos de validez asociados a definiciones y teoremas. El detalle se encuentra en los apartados 4.5, 5.3, 6.3, 7.3 y 8.4

Respecto de las Hipótesis formuladas.

De las cuatro hipótesis:

H1: La Transposición didáctica del álgebra de radicales ha permanecido invariante en su difusión en los libros de texto.

H2: En el tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto, se recurre a demostraciones basadas en el cambio de representaciones algebraicas que fallan en la secuenciación de los contenidos.

H3: El tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto, comunica errores conceptuales y procedimentales, evidenciándose rupturas epistemológicas con el saber matemático.

H4: No han existido cambios en los enfoques paradigmático – epistemológicos de los autores de los libros de texto, pero si a nivel de los programas ministeriales.

- La hipótesis H1, se cumple sólo para algunos puntos evidenciados en la tabla 8.4 y que corresponde a: llamar raíces a las expresiones con el signo radical, introducir implícitamente el radical como inversa de la potenciación, emplear el signo radical y la notación como potencia para su representación y de sus propiedades enunciar unilateralmente la multiplicación y división de radicales de igual índice, lo que contradice el significado algebraico del signo igual. Además en su ecología se ha producido cambios, de los cuales no han sido sufridos por aplicaciones tales como la Racionalización sólo de denominadores, con el fenómeno de la irreversibilidad ya mencionado en el apartado 8.4, la resolución correcta de ecuaciones cuadráticas y el problema de la irracionalidad numérica.
- La Hipótesis H2, se cumple en los dos primeros períodos pero es superada en el tercero.

- La Hipótesis H3 se cumple en los tres períodos, existiendo rupturas invariantes como los fenómenos indicados en el apartado 8.4 acerca de la Unilateralidad de las propiedades de los radicales, a irreversibilidad de la racionalización, las justificaciones del empleo de las notaciones de forma radical y de potencia.
- La Hipótesis H4 se ha cumplido en plenitud en el entendido que los programas con la poca información de que se dispone, a excepción de los del tercer período, han mostrado intenciones diferentes, pasando por un marco estructuralista a uno mecanicista y a otro centrado en la aplicaciones a la vida cotidiana. En tanto en las presentaciones de contenidos en los libros de texto, sigue predominando el sentido Axiomático – mecanicista, lo que puede verse en detalle en el apartado 8.3

De este modo, se ha cumplido satisfactoriamente con los objetivos planteados y se han podido, al igual que las Hipótesis aceptar o refutar en ciertos aspectos que ya he desarrollado en este capítulo y en las conclusiones locales, ubicadas en los apartados 4.5, 5.3, 6.3 y 7.3.

8.6. Conclusiones generales respecto a la Metodología e instrumentos utilizados.

Uno de los principales aportes de esta tesis está en la Metodología que se siguió, la cuál puede ser tomada como modelo para la investigación de otros conceptos matemáticos, siempre conservando un diseño descriptivo – interpretativo que pretende buscar en los registros del pasado, elementos que permitan dar un sustento a las decisiones futuras respecto de conocer y considerar hechos que permitan regular las propuestas de enseñanza y aprendizaje de un contenido específico, poniendo atención a los fenómenos que resultan de la revisión de textos de estudio. Para tal efecto, es

imprescindible la técnica de Análisis de Contenido, que se ocupa netamente de lo relacionado con el tema a estudiar, por tanto se requiere de una técnica que complemente la anterior y le dé mayor rigurosidad científica al análisis documental, que es el método histórico - crítico, que da el marco regulatorio para la elección de la muestra, los criterios para definir su validez y fiabilidad y aporta con el contexto de las fuentes que son analizadas, lo que no es menor y ayuda a comprender paradigmas y epistemes predominantes, como lo he ilustrado con la influencia de la reforma de las matemáticas modernas, especialmente en el primer período considerado.

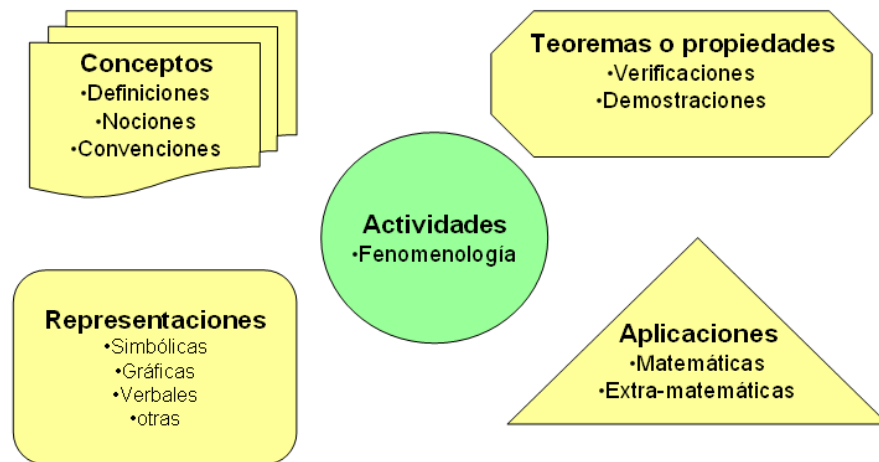
Los instrumentos si requirieron de bastante tiempo de perfección, y constituye la gran tarea para quien desee utilizar la metodología empleada en esta tesis. Cada contenido, cada concepto no vive aislado en la teoría ni en la práctica, ni en la organización de la matemática erudita ni en la organización de la matemática escolar (por cierto distinta de la anterior). Esto hace que existan elementos de las matrices MIG y MAC que deben alterarse en razón de las peculiaridades del objeto matemático sobre el que se quiera indagar.

Puede concluirse que la metodología empleada puede considerarse como Modelo de investigación de objetos matemáticos respecto de su tratamiento en libros de texto con el propósito de observar su evolución en el tiempo y detectar rupturas en pleno acto de vigilancia epistemológica. Para llevar a cabo esto, propongo el siguiente algoritmo (sin tener que ser único). Teniendo claridad del objeto matemático que se quiere estudiar y por qué es necesario hacer tal estudio entonces:

1. Realice un análisis histórico - epistemológico del objeto matemático y localice su estatus en el Saber Erudito. Esto da el sustento desde donde se va a comentar y analizar los datos de la organización didáctica de lo que se quiere estudiar y por tanto es el marco de referencia para evaluar la transposición didáctica puesta en observación.

2. Revise en bibliotecas, en puntos de venta de libros nuevos y antiguos, converse con anticuarios y bibliófilos, y si es necesario, origine una encuesta. Todo esto para decidir cuáles son los libros de texto que estarán en la muestra, de tipo intencional y por conveniencia y que por su puesto traen el contenido de interés **en el sentido del interés**, ya que por ejemplo en esta tesis interesa observar los radicales en el ambiente algebraico razón por la que se habla de álgebra de radicales, por tanto los desarrollos aritméticos no son parte de la muestra.
3. Seleccione los períodos en que le interesa hacer el estudio, al menos deben ser dos.
4. Elabore matrices para la recopilación de datos. Estas matrices son de dos tipos: identificación general (con datos como autor, fecha de edición, presentación física de la fuente, ejemplares, etc.) y otra exclusiva de análisis del contenido puntual.
5. Diseñe, valide y aplique una matriz de resumen con respecto a las matrices MIG y MAC para sintetizar la información y con ello dar origen a Perfiles del Saber a Enseñar de los libros de texto, por período.
6. Triangule los Perfiles para obtener la Caracterización del contenido en el período completo en que se fijó realizar la investigación.
7. Si además realiza el mismo estudio con otras fuentes, por ejemplo con los programas ministeriales, aplica a éstos el mismo procedimiento que el que aplicó a los libros de texto, obteniendo así otra fuente para caracterizar su evolución. Finalmente se triangulan estas caracterizaciones junto al Saber erudito de referencia y se establecen las conclusiones.

Para el análisis de contenido, una buena ayuda de qué mirar se encuentra en este esquema



O bien otros elementos a considerar pueden ser:

- La organización temática y secuenciación propuesta.
- La cantidad y calidad de las actividades. Por ejemplo, Ejercicios y Problemas incluidos.
- La concepción que se tiene de la Matemática.
- La iconografía.
- El uso de recursos.
- Momentos claves: Formulación y validación de conjeturas, presencia de la Institucionalización del saber.
- Bibliografía recomendada o referencial, entre otros.

Se pueden obtener:

- Errores conceptuales. Mutilación conceptual.
- Representaciones inadecuadas.
- Demostraciones espurias.
- Aplicaciones forzadas.

- Iconografía no generalizable.
- Obstáculos didácticos:
 - Existencia de reglas nemotécnicas
 - Procesos que siempre resultan
 - Definiciones con omisiones, imprecisiones.

8.7. Proyecciones de este estudio.

Hoy cuando se cierra esta investigación, estamos a las puertas de un proceso de Ajuste curricular que trae cambios mayores al currículo de los cursos, pero que no alcanza a ser objeto del presente estudio por motivos cronológicos y además, no existe el material suficiente para su análisis. ¿Qué ocurrirá con este cambio curricular en torno a lo que ha sucedido en los últimos 40 años respecto de las raíces y los radicales y su enseñanza en Chile?. Sin duda esta es una posible proyección de este estudio, sin embargo hay bastantes otros, de los que destacamos las siguientes:

1. El desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación nos propone un inmenso desafío, muchos materiales han sido digitalizados, como ocurre con “Los Elementos” de Euclides, y muchos otros que están o estarán disponibles en sitios web o dispositivos de almacenamiento electrónico. Así tal como esta tesis se desarrolló en base a manuales escolares, otra alternativa es la revisión de material electrónico, en el que a diferencia de los libros impresos, en el mundo virtual se tienen registros dinámicos que también son y deben una rica fuente de investigación.
2. Se propone en esta tesis un método para ejercer la vigilancia epistemológica del saber escrito en los libros de texto y en programas ministeriales. Se tiene de esta forma una manera de aproximarse a otros estudios que empleen la misma metodología expuesta pero cuya distinción está en el contenido a examinar, el

que puede tratarse con distintos lapsos de tiempo, situados a nivel local bajo una misma reforma (por ejemplo lo que se hizo en cada uno de los capítulos 5 al 7) o bien un examen conjunto de los varios períodos a definir como se ha hecho acá por los intereses del investigador por una parte, y por otra, de las factibilidades de disponibilidad del material.

3. La creación de un conjunto o familia de investigaciones acerca del análisis de manuales escolares, conformando así una línea de investigación que pueda favorecer a la construcción de ingenierías didácticas que respondan a un análisis que se sustenta en la vigilancia epistemológica, entre otros aspectos que puedan dotarla de mayor solidez como un análisis didáctico - fenomenológico, el que es incorporado por otros investigadores en el análisis de libros de texto.
4. Levantar la discusión acerca de la importancia del conocimiento de este tipo de análisis y su incorporación en la formación del profesorado de matemáticas, en razón de cómo ayuda este tipo de investigaciones a la elección y previa evaluación de libros de texto para su utilización en el aula o bien de las competencias que debe tener un experto a nivel ministerial o a nivel de editorial para tomar decisiones a nivel de licitaciones.

Cabe señalar dos repercusiones que deja a modo de reflexión esta investigación: Una referida al uso de los libros de texto por parte de los estudiantes que lo utilizan como medio de creencia férrea en lo que dicen y por otro lado, cómo se ve afectado el pensamiento de los profesores por estos mismos dispositivos. Sin duda, hay un tema que tratar aquí, en cuanto al grado de responsabilidad que le cabe a los profesionales que elaboran, diseñan, publican y evalúan libros de texto, cómo llega la información allí expuesta al profesor, al consumidor como padres que ayudan a sus hijos, y los mismos estudiantes que reciben, supuestamente, un material confiable. He aquí una interesante polémica para el debate.

Para finalizar, se enuncian algunas preguntas y esbozos de respuesta, las que se fueron detonadas por esta investigación. No se pretende resolverlas por completo, pero si dejar en evidencia que se trabajará en ello, en función de la reflexión posterior que todo arduo trabajo científico deja para la posteridad.

1.¿Cuál es el aporte específico de la tesis a la Comunidad Científica?

El aporte específico de la tesis a la comunidad científica está en levantar elementos que deben considerarse a la hora de evaluar un libro de texto, como el modelo trabajado en esta investigación y que permite observar la brecha que hay entre el saber escolar y el erudito, procurando la vigilancia epistemológica de qué, cómo y bajo qué condiciones y contextos se enseña. También aporta en el sentido de levantar argumentos para analizar la pertinencia de las génesis artificiales que se proponen en el la construcción del saber escolar.

2.¿Cómo se podría potenciar la línea de investigación instalada en el estudio original?

Una línea de investigación se potencia con más trabajos que se desarrollen en ella, siendo esta tesis pionera en Chile en ese sentido. Se requiere también que otros investigadores se inclinen en este camino.

3.¿Qué elementos y reflexiones entrega a los especialistas en Didáctica de las Matemáticas y de otras áreas del conocimiento educativo?

Las reflexiones que entrego a los didactas de las matemáticas y de otras áreas, es sobre la importancia que tiene la concepción de matemáticas del profesor. La epistemología de las matemáticas son un punto central para comprender varios fenómenos de enseñanza y aprendizaje y entonces, debiese estar presente en la formación de profesores, tanto inicial como continua. El papel de la epistemología de los objetos que se enseñan resulta ser de vital conocimiento de quien enseñe y esto creo, es válido para todos los campos del conocimiento.

Referencias Bibliográficas

Abrate, R., Delgado, G., Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. En Revista Iberoamericana de Educación Organización de Estados Iberoamericanos, N° 39, disponible en <http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf>.

Ander-Egg, E. (2003). Métodos y Técnicas de investigación social IV. (2° ed.). Cap. 4: “La Entrevista”, pag. 85-116. Buenos Aires. Grupo Editorial Lumen Hvmanitas.

Armendariz, M., Azcárate C., Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las Matemáticas y Psicología. Revista Infancia y Aprendizaje. 62 – 63, 77 - 99

Arostegui, J. (1994). La investigación histórica: Teoría y método. Crítica. Barcelona.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10 (2,3), 241 – 286.

Assude, T. (1992). Un phénomène d’arrêt de la transposition didactique. Ecologie d’object Racine Carrée et analyse du curriculum. Tesis para optar al grado de Doctor en Didáctica de la Matemática de la Informática. Université Joseph Fourier. Grenoble I. Francia.

Azcárate, C. y Deulefeu, J. (1996). Funciones y gráficas. Síntesis. España.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. and Gascón, J. (2005). Didactics restrictions on the teacher’s practice: The case of limits of functions in Spanish high schools, Educational Studies in Mathematics 59(1-3), 235-268.

Barona, J. (1994). Ciencia e Historia. Debates y tendencias de la Historiografía de la Ciencia. Seminari D’estudis sobre la Ciencia, Valencia.

Bell, E.T. (1940). The Development of Mathematics. New York. Mc Graw – Hill Book.

Benacerraf, Putnam (1983). Phylosophy of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press. (1.ed. Prentice – Hall, 1964).

Bishop, A. (1999). Enculturación Matemática. Primera edición Matemática desde una perspectiva cultural, Paidós, Barcelona.

Bisquerra, R. (1989). Métodos de investigación educativa. CEAC.

Bourbaki, N. (1964). Éléments de Mathématiques. Álgebre. Hermann. París. Francia.

Boyer, Carl. (1968). *Historia de la Matemática*. Madrid, España. Alianza Editorial Textos.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 7 (2), 33 -115.

Brunner, J. (1995). Educación en el siglo XXI y el rol de las nuevas tecnologías de información y comunicación. Documento de OCDE.

Brunschvicg, L. (1983). *Las etapas de la Filosofía Matemática*. Lautaro, B. Aires.

Bruno, A. y Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Revista Educación Matemática*, Santillana. 18 (003), pp. 125 – 149.

Cajori, F. (1928). *An history of mathematical notations*. Chicago, E. U. A.:The open court pub Company.

Cañon, C. (1993). *La Matemática: creación o descubrimiento*. Universidad Pontificia de Comillas, Madrid.

Cañon, C. (1998): Epistemologías falibilistas en Matemáticas; Lakatos. IV Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias. Gijón.

Chamizo, J. (2007): Las aportaciones de Toulmin a la enseñanza de las Ciencias. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 133 – 216.

Chamorro, M. (2003). ¿Qué didáctica de las matemáticas necesita la sociedad para el siglo XXI?. *Pedagogía y Educación ante el siglo XXI*. pp. 481 - 496

Chaves, E. y Salazar, J. (2003): *La Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática*. Universidad Nacional de Costa Rica. Disponible en: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/una/tesis/La%20historia%20de%20la%20matematica%20como%20recurso%20metodologico%20en%20los%20procesos%20de%20ensenanza%20a%20aprendizaje.pdf>

Castelnuovo, E. (1999). *Didáctica de la Matemática Moderna*. México.

Chevallard, Y. y Johsua, M.A. (1991). *La Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. La pensee sauvage, éditions. Francia.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori. Barcelona.

Chevallard, Y. (1992). Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives apportées par una approche Anthropologique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 12 (1), 73 -112.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla. Madrid.

Colegio de Profesores (2005). Formación docente, capítulo IV, en: *Las reformas educativas en los países del Cono Sur: un balance crítico*, CLACSO, Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Colerus, E. (1943). *Historia de la Matemática. De Pitágoras a Hilbert*. Traducción directa del Alemán por Caplán, N. Buenos Aires. Argentina. Ediciones Progreso y Cultura.

Collette, J. (1973). *Histoire des Mathématiques I & II*. Montreaux. Suiza. Éditions du renouveau pédagogique.

Colín, M. y Martínez, G. (2007). De la Aritmética al cálculo: Un estudio transversal de la Raíz Cuadrada. *Memorias de la VII semana regional de investigación y docencia en matemáticas*. *Revista Mosaicos Matemáticos* 20. pp. 45 – 50. México.

Comenius, J. (1640) *Didáctica Magna*, traducción de 1986 por S. López Peces. Akal, Madrid.

Cousquer E. (1998). *La Fabuleuse histoire des nombres*. Paris, Francia. Diderot Editeur.

Cox, C. y González, P. (1997) *Política de mejoramiento de calidad y equidad en educación escolar en la década de los 90*.

D'Amore, B. (1999). La didáctica de la matemática como epistemología del aprendizaje matemático. En: D'Amore, B. *Elementi di didattica della matematica* (caps. 1 y 2, pp. 13-54 y 55-98). Pitágora Editrice, Italia. [Trad. cast.: Víctor Larios O.]

De Lorenzo, J. (1974). *La Filosofía de la Matemática de Poincaré*. Tecnos, Madrid.

De Lorenzo, J. (1998). *La Matemática: de sus fundamentos y crisis*. Tecnos, Madrid.

De Lorenzo, J. (2000). *Filosofías de la Matemática fin del siglo XX*. Universidad de Valladolid, Valladolid.

De Lorenzo, J. (1977). *La Matemática y el problema de su Historia*. Tecnos, Madrid.

Del Carmen, L. y Jimenez, M.P. (1997). Los libros de texto: un recurso flexible. *Revista Alambique*, número 11, año IV, pp. 7 - 14.

Depman, I. (2007). *Del Álgebra clásica al Álgebra Moderna. Una breve introducción histórica*. Traducido del ruso por Navarro C. y Romero A. Moscú. U.R.S.S.

Dhombre, J. (1978). *Nombre, mesure et continu épistémologie et histoire*. Paris, Francia. Nathan, Cedic.

Diaz, G. (1999). *Zubiri, Lakatos y la crisis gödeliana del fundamento matemático*. Centro de Enseñanzas Integradas, Zaragoza, España.

Echeverría J. (2003). *Introducción a la Metodología de la Ciencia. La Filosofía de la Ciencia en el siglo XX*. Cátedra: Madrid.

Eyzaguirre, B., Fontaine, L. (1997). *El futuro en riesgo: nuestros textos escolares*. Centro de Estudios Públicos CEP. 68. Chile.

Fauvel, J. (1991). *History in the mathematical classroom. The IREM papers. The Mathematical Association*. Francia.

Ferrari, V. (1999). Sentidos y significados en la enseñanza de la Matemática. *Correo del Maestro*, 35. *Revista de Profesores de Educación Básica*, recuperable en <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/1999/abril/indice35.htm>

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Paidea, Madrid.

Font, V. (2002). Una Organización de los Programas de Investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista EMA*, 7(2), 127 – 170.

Font, V. (2003). Matemáticas y Cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 249 – 279.

Freudenthal, H. (1982). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

García, Y. (2000). Análisis de contenido del texto escolar de matemática según las exigencias educativas del nuevo milenio. Documento recuperable en <http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n16/n16art/art162.htm>, Venezuela.

García Huidobro, J. y Cox, C. (1999). *Capítulo I : La Reforma Educacional Chilena 1990 – 1998*.

- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7-34.
- Giere, R. (1992). *La Explicación de la Ciencia, Un acercamiento cognoscitivo*. CONACYT, México.
- Gödel, K. (1980). Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Matemática y Sistemas Afines, I, Cuadernos Teorema.
- Godino, J. (1991). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. Disponible en <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.
- Godino, J. (2006). Marcos Teóricos de Referencia sobre la Cognición Matemática. Documento de trabajo del curso de Doctorado Teoría de la Educación Matemática. Recuperable en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.
- Godino, J.D. (2000a). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. *Números*, 40. (En línea. Documento disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/Teoria_Metodos/Consolidacion.htm).
- Godino, J.D. (2000b). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.
- Goetz, J.P. y LeCompte, M.D.(1988). *Etnografía y Diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata, Madrid.
- González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), pp. 389 – 408. España.
- Gómez, B. (2000). Los Libros De Texto De Matemáticas. *Números*, 43-44, 77-80.
- Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. En Antonio Martín (Ed.). *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*. Madrid: Nivola (pp. 77-80). ISBN. 84-95599-03-1.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, B. (2003). La investigación Histórica en Didáctica de la Matemática. En E. Castro, p. flores, T. Ortega, I. Rico y A. Vallecillos. *Investigación en Educación Matemática. VII simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) Universidad de Granada*. Septiembre (p. 79-85). ISBN 84-338-3019-8 (349 pgs.).

Gómez, B. (2008). Pasado y presente de los manuales escolares. En Associação de Professores de Matemáticas - APM (Eds.), Actas do SIEM - 2007. XVIII SIEM. Seminário de Investigação em Educação Matemática. Painei: Avaliação de Manuais Escolares. 1-8.

Gómez, B. (2009). El análisis de los manuales y la identificación de los problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Cantabria, España.

Gómez, B. y Buhlea C. (2008). The ambiguity of the sign $\sqrt{\quad}$. 6th CERME - Congress of The European Society for Research in Mathematics Education. Pre-congress publication. Papers in the website of the congress: Research Report. Working Group 4 Algebraic thinking. Lyon, France. ERME (European Society for Research in Mathematics Education). Univ. Lyon.

Guzmán I. (2001). Fundamentos Teóricos de la Didáctica de la Matemática. Apuntes de clases. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Guzmán I. (2000): Transposición Didáctica. Apuntes de clases. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Heath, T. (1981). A History of Greek Mathematics. New York. Dover Publications, INC.

Herstein, I.N. (1986). Álgebra Abstracta. Grupo editorial Iberoamericana. México.

Hofmann, J. (2005). Historia de la Matemática. Desde el comienzo a la Revolución Francesa. Traducción directa del Alemán por Valls, V. y Fernández, G. México. Limusa.

Inglada, N.; Font, V. (2004). Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaissance mathématique commune. In Giménez,, J, Fitzsimons,G, Hahn,C (ed) Globalisation and mathematics Education. CIEAEM 54 (pp. 365-375). Barcelona: Graó. Disponible en <http://www.webpersonal.net/vfont/IngladaFontCieaem54t.pdf>

Kilpatrick, J., Rico, L., Sierra, M. (1994). Educación Matemática e investigación. Editorial Síntesis, Madrid, España.

Kilpatrick, J. (1996). Valoración de la investigación en didáctica de las matemáticas: más allá del valor aparente". En: Puig, L.; Calderón, J. (eds.) Investigación y didáctica de las matemáticas (pp. 31-48). Ministerio de Educación y Ciencia, España.

Klein, F. (1908). Matemáticas desde un punto de vista avanzado.

Kline, M. (1992). *Mathematical thought from ancient to moderns times*. Vol. I, II, III. New York, E.U.A.: Oxford University press.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la Matemática Moderna, Por qué Juanito no sabe sumar*. Siglo XXI Editores. Madrid.

Labarrere, A. y Quintanilla, M. (2006) *La solución de problemas en el aula. Reflexiones sobre los planos de análisis y desarrollo*. Revista *Pensamiento Educativo*, Vol.30, Págs., 121-138, Chile.

Martinon, A., Pérez, A, Sauret, M., Vásquez, T. (1990). *Nota sobre radicales y raíces*. Revista *Números* 20, pp 25 – 35. España.

Maz, A. (1999). *Historia de las Matemáticas en clase: ¿Por qué?, ¿Para qué?*. En Berenguer, I. Cardeñoso, D. y Torero, M. (eds). *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad*. Granada. Universidad de Granada y Sociedad Thales.

Maz, A. (2000). *Tratamiento dado a los números negativos en libros de texto publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Granada. Universidad de Granada.

Maz, A. Rico, L. (2007). *Situaciones asociadas a los Números Negativos en textos de Matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX*. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática PNA* 1(3), 113-123. España. Disponible en <http://www.pna.es/Numeros/pdf/Maz2007Situaciones.pdf>.

MINEDUC (2006). *Actas del Primer Seminario Internacional de Textos Escolares SITE 2006*. Santiago de Chile. Disponible en www.textosescolares.cl. Santiago.

MINEDUC (2003). *Evaluación de programas gubernamentales. Informe final de Evaluación. Programa de Textos Escolares de Educación Básica y Media*. Santiago.

Moreno, M. (2007). *De la Matemática formal a la Matemática escolar*. *PNA*. 1(3), 99 – 111.

Newman, J. (1968). *El Mundo de las Matemáticas Vol I y IV*. España. Ediciones Grijalbo.

Novelli, A. (2005). *Elementos de Matemáticas*. Buenos Aires. Argentina.

Núñez, J.M. y Font, V. (1995). *Aspectos ideológicos en la contextualización de las Matemáticas. Una aproximación histórica*. *Revista de Educación*, 306, 293 – 314.

- Núñez, I. (1997). El Ministerio de Educación de Chile (1927 – 1997). Una mirada analítica en 160 años de educación pública. Historia del Ministerio de Educación, Departamento de Comunicaciones, MINEDUC, Santiago de Chile.
- Lakatos, I. (1978). Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Alianza editorial: Madrid.
- Lakatos, I. (1981). Matemáticas, ciencia y epistemología. Alianza editorial: Madrid.
- Larroyo, F. (1976). Filosofía de las Matemáticas. D. F. , México. Editorial Porrúa, S.A.
- Leyton, M. (1970) La experiencia chilena. La Reforma Educacional: 1965 – 1970, CPEIP, Santiago de Chile.
- OECD (2003). Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003. París:OECD Pub. Service.
- Ossenbach, G. (2000). La investigación sobre manuales escolares en América Latina: la contribución del Proyecto MANES. Revista Historia de la Educación. 19. pp. 195 – 203. Salamanca, España.
- Pelletier, J.L. (1958). Etapas de la Matemática. Buenos Aires, Argentina: Losada.
- Pérez, M. (2006). Una Historia de las Matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes. Tomo I y II. Madrid. España. Visión Net.
- Piaget J. (1979). Tratado de Lógica y Conocimiento Científico. Vol. III. Epistemología de la Matemática. Editorial Paidós. Buenos Aires.
- Praus W. (1996). Algunos temas sobre el lenguaje básico de la Matemática. Instituto de Matemáticas, Universidad Católica de Valparaíso. Texto sin publicar. Chile.
- Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática / coord. por Encarnación Castro Martínez. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://www.uv.es/puigl/granada%2003%20oral>
- Puig, L. (1996). La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora. En: Puig, L. y Calderón, J. (eds.) Investigación y didáctica de las matemáticas (pp. 103-118). Ministerio de Educación y Ciencia, España.
- Quintanilla, M. (2005). Historia de la ciencia y formación docente: una necesidad irreductible. Revista TEA, Bogotá, Colombia. Vol.extra./34-43

Quintanilla, M. (2004). Bases orientadoras para la identificación y caracterización de un modelo teórico de formación temprana en historia de la ciencia para profesores de química. En: *Didáctica de las Ciencias y Formación del Profesorado*. Chapter 1. Ediciones Colciencias, Bogotá, Colombia.

Quintanilla, M. Adúriz-Bravo, A. (2006). *Enseñar Ciencias en el nuevo milenio. Retos y propuestas*. Ediciones Universidad Católica de Chile.

Rey Pastor, Babini, J. (1951). *Historia de la Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Espasa –Calpe.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.

Rico, L., Sierra, M. (1991). La comunidad de educadores matemáticos. En, A. Gutiérrez (ed.) *Area de conocimiento Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis, pp. 11-58.

Rico, L., Sierra, M. (1994): *Educación Matemática en la España del siglo XX*. En, J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis, pp. 99-207.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 12(1), 45 – 46.

Rojas, L. (1997). *Historia y crisis de la Educación Chilena*, 1ª Edición, Editorial Cantaclaro, Santiago de Chile.

Romberg, T. (1988). Necessary Ingredients for a Theory of Mathematics Education. En Steiner, H.G. y Varmandel, A. (eds.) (1988).

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación–acción*. Granada: Comares.

Ruiz, A. y Barrantes, H. (1996). *La Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática*. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Disponible en: <http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/CIAEM/porta2.htm>.

Sánchez, C., Contreras A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 1998, 16(1), pp. 73 – 84. España.

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en Educación*. Mc Graw – Hill, Madrid.

Santaló, L. (1994). *La Matemática, una filosofía, una técnica*. Ariel editores. España.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor. For the Learning of Mathematics 7, 3, 41-51.

Sherman, R.R. y R.B. Webb. (1988). Qualitative research in education: A focus. In: Qualitative research in education: focus and methods, pp. 2-22. Sherman, R.R., Webb, R.B. (Eds.). The Falmer Press. New York, USA.

Sierra, M., Rico, L., Gómez, B. (1997). El número y la forma. Libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En, A. Escolano (dir.) Historia ilustrada del libro escolar en España. Tomo I: del Antiguo Régimen a la Segunda República. Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez, pp. 373-398.

Sierra, M. (1997). Notas de historia de las Matemáticas para el currículo de secundaria. En L. Rico (ed.): La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: Horsori- ICE Universitat de Barcelona, pp. 179-194.

Sierra (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. En A. Martín (ed.) Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos. Madrid : Nívola, pp. 93-96. VV.AA.: Monografías de Editorial Nívola sobre Historia de las Matemáticas.

Sierra, M., González, M.T., López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de Límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U.): 1940 – 1995. Revista Enseñanza de las Ciencias, 17(3), pp.463 – 476. España.

Sierra, M., González, M.T., López, C. (1999). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. Educación Matemática, 15(1), 21 – 51. España.

Smith, D. (1958). History of Mathematics Vol. I, II. New York. Dover Publications, INC.

Soto, F. (2000). Historia de la educación chilena, CPEIP, Santiago de Chile.

Spivak, M. (1970). Calculus. París. Editorial Reverté.

Steiner, H.G. (1985): “Theory of Mathematics Education: an introduction.” For the learning of Mathematics, 5(2), 11 – 77.

Steiner, H.G. (1990). Hended cooperation between science education and Mathematics Education. Zentrblatt für Didaktik der Mathematik, 90(6), 194 – 197.

Tavignot, P. (1993). Analyse du processus de tranposition didactique. Application a la symétrie orthogonale en sixieme lors la reforme de 1985. Recherches en didactique des mathematiques, 13(3), pp. 257 – 294.

Toulmin, S. (1977). *La Comprensión Humana. El uso colectivo y evolución de los conceptos*. Alianza editorial: Madrid.

Van Dalen, D. B. y Meyer, W. J. (1981). *Manual de técnicas de la investigación educacional*. Paidós, Barcelona.

Vargas J. (2003). *La Construcción de los irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado*. Revista Ciencia y Tecnología N° 14. Colombia.

Vidal, R. (2001). *Estudio de algunos errores en la enseñanza de la Matemática*. Tesis para optar al Título de Profesor de Matemática e Informática Educacional. Departamento de Matemática. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Santiago, Chile.

Vidal, R. (2006). *Concepciones de los profesores de educación media acerca del objeto de enseñanza Raíz Cuadrada, Una mirada desde la Transposición Didáctica*. Tesis para optar al Grado de Magíster en Enseñanza de las Ciencias con Mención en Didáctica de la Matemática. Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Villella J. (2001). *Uno, dos tres...Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en EGB*. Editorial Aique, Buenos Aires.

Villella, J. (2007). *Matemáticas escolares y libros de texto. Un estudio desde la Didáctica de las Matemáticas*. San Martín, USAM, Argentina.

Villella, J., Contreras, L. (2005). *El conocimiento profesional de los docentes de matemáticas en relación con la selección y uso de libros de texto*. Revista de Educación 340. pp. 973 – 992. Argentina.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática*. Alianza editorial: Madrid.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Traducido del Alemán por Ausejo, E. y otros. España. Siglo XXI Editores, S.A.

Zamansky, M. (1967). *Introduction À l'algèbre et analyse modernes*. París, Francia. Dunod Editeur.

Zamora, J. (2000). *El Naturalismo científico de Ronald Giere y Philep Ritche, un ensayo de comparación crítica*. En Revista de Filosofía 3º época, Vol. XIII, (24) 169 – 190. Servicio de Publicaciones, Universidad Complutense de Madrid.